

Examen de mi-session 2

Version A

NOM de famille: _____

Prénom: _____

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (Texas Instruments TI-30, TI-34 et Casio fx-260, fx-300) sont autorisées. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- La question 1 consiste en 8 sous-questions vrai ou faux. Elle vaut 4 points. Les questions 2 à 5 sont à choix multiples et valent aussi chacune 2 points. Encerclez la réponse correcte. (Les réponses numériques sont arrondies à la dernière décimale indiquée.)
- Les questions 6 à 9 sont à développement et valent chacune 2 points. Elles requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution.
- L'examen est noté sur 20.

Tâchez de réserver au moins 40 minutes pour les questions à développement 6 à 9.

Vrai ou Faux?

1. [4 points] Déterminez dans chaque cas si l'énoncé donné est vrai ou faux et encerclez la bonne réponse.

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.	<input checked="" type="radio"/> Vrai <input type="radio"/> Faux
Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente. (1)	Vrai <input checked="" type="radio"/> Faux
Si la série alternée $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ satisfait $0 < a_{n+1} < a_n$ pour tout $n \geq 0$, alors elle est convergente. (2)	Vrai <input checked="" type="radio"/> Faux
Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.	<input checked="" type="radio"/> Vrai <input type="radio"/> Faux
Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente, alors elle est absolument convergente. (3)	Vrai <input checked="" type="radio"/> Faux
Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente. (4)	Vrai <input checked="" type="radio"/> Faux
Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente.	<input checked="" type="radio"/> Vrai <input type="radio"/> Faux
La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est convergente de somme $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ quels que soient a et r . (5)	Vrai <input checked="" type="radio"/> Faux

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ bien que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

(2) Le test des séries alternées demande aussi que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Exemple: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ diverge bien que $0 < 1 + \frac{1}{n+2} < 1 + \frac{1}{n+1} \forall n \geq 0$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais non absolument convergente

(4) Si $a_n = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

(5) Si $a \neq 0$, il faut que $|r| < 1$.

2. [2 pts] La somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{30}{(n+2)(n+1)}$ est

A: 26 B: 28 C: 29 **(D): 30** E: 31 F: 32

$$\text{Solution } \frac{30}{(n+2)(n+1)} = \frac{30((n+2)-(n+1))}{(n+2)(n+1)} = \frac{30}{n+1} - \frac{30}{n+2}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k \frac{30}{(n+2)(n+1)} &= \sum_{n=0}^k \frac{30}{n+1} - \sum_{n=0}^k \frac{30}{n+2} \\ &= \left(\frac{30}{1} + \frac{30}{2} + \dots + \frac{30}{k+1} \right) - \left(\frac{30}{2} + \frac{30}{3} + \dots + \frac{30}{k+2} \right) \\ &= 30 - \frac{30}{k+2} \rightarrow 30 \text{ si } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{30}{(n+2)(n+1)} = 30$$

3. [2 pts] La somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n+2}}{5^{n+1}}$ est

A: $-\frac{16}{3}$ B: $-\frac{3}{2}$ C: $-\frac{9}{2}$ **(D): $-\frac{25}{6}$** E: $-\frac{5}{2}$ F: $-\frac{13}{6}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n+2}}{5^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{1/5}{1 - 2/5} - \frac{9/5}{1 - 3/5} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{9}{2} \\ &= -\frac{25}{6} \end{aligned}$$

4. [2 pts] Quelle est la plus petite valeur de k pour laquelle on peut assurer que la somme partielle $s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^{5/2}}$ approxime la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ avec une erreur d'au plus 10^{-3} ?

A: 25 B: 37 C: 41 D: 61 **(E): 77** F: 89

Solution Comme $f(x) = \frac{1}{x^{5/2}}$ est décroissante pour $x \geq 1$, on a

$$R_k = |S - s_k| \leq \int_k^{\infty} \frac{1}{x^{5/2}} dx \quad \text{pour tout } k \geq 1$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{2}{3} x^{-3/2} \right]_k^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{3} t^{-3/2} + \frac{2}{3} k^{-3/2} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{k^{3/2}}$$

$$R_k \leq 10^{-3} \quad \text{si} \quad \frac{2}{3} \frac{1}{k^{3/2}} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow k^{3/2} \geq \frac{2000}{3} \Leftrightarrow k \geq (666.\bar{6})^{2/3} \approx 76.3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k \geq 77}$$

5. [2 pts] On sort un fromage Camembert du réfrigérateur pour qu'il se réchauffe avant le repas. La température initiale du fromage à sa sortie du réfrigérateur est de 4°C . Après 15 minutes, elle est de 10°C . En supposant que la température du fromage obéisse à la loi du réchauffement de Newton, quelle sera sa température 30 minutes après l'avoir sorti du réfrigérateur si la température de la pièce est de 22°C ?

A: 12°C **(B): 14°C** C: 16.5°C D: 18°C E: 19.5°C F: 21°C

Solution Soit $T(t)$ la température du fromage après t minutes

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 22), \quad T(0) = 4, \quad T(15) = 10$$

$$\Rightarrow \int \frac{dT}{T-22} = \int k dt \Rightarrow \ln|T-22| = kt + C \Rightarrow |T-22| = e^{kt+C}$$

$$\Rightarrow T = 22 + A e^{kt} \quad \text{où } A = \pm e^C$$

$$T(0) = 4 \Rightarrow 4 = 22 + A \Rightarrow A = -18 \Rightarrow T(t) = 22 - 18 e^{kt}$$

$$T(15) = 10 \Rightarrow 10 = 22 - 18 e^{15k} \Rightarrow e^{15k} = \frac{22-10}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{15} \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0.02703$$

$$\Rightarrow T(t) = 22 - 18 e^{-kt} \Rightarrow T(30) = 22 - 18 e^{-30k} = 22 - 18 e^{-2 \ln(2/3)} = \boxed{14}$$

6. [2 pts] À l'aide du test de comparaison, déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3\sin(n)}{3n^3+n+4}$ est convergente ou divergente. Prenez soin de rédiger une solution claire.

$$\begin{aligned} 5+3\sin(n) &\leq 5+3=8 && \text{pour tout } n \geq 1 \\ 3n^3+n+4 &\geq 3n^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{5+3\sin(n)}{3n^3+n+4} \leq \frac{8}{3n^3} \quad \text{pour tout } n \geq 1 \quad (\text{et } \geq 0)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+3\sin(n)}{3n^3+n+4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{3n^3} = \frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

(Série de Riemann avec $p=3$)

\Rightarrow La série donnée est convergente.

7. [2 pts] Déterminez le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{n^2}$.

terme général $a_n = \frac{3^n(x-2)^n}{n^2}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}|x-2|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n|x-2|^n} = 3|x-2| \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\rightarrow 3|x-2| \text{ si } n \rightarrow \infty$$

D'après le test du quotient, la série est

$$\text{convergente si } 3|x-2| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < \frac{1}{3}$$

$$\text{divergente si } 3|x-2| > 1 \Leftrightarrow |x-2| > \frac{1}{3}$$

Le rayon de convergence est $\boxed{R = \frac{1}{3}}$.

8. [2 pts] Sachant que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$ est convergente si $|x-2| < 3$ et divergente si $|x-2| > 3$, déterminez son intervalle de convergence. (Vous devez déterminer si la série est convergente aux extrémités et justifier vos réponses.)

$$|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff \boxed{-1 < x < 5}$$

• En $x = -1$, la série devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

C'est une série alternée avec $\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, décroissant vers 0. Donc elle converge.

• En $x = 5$, elle devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty \quad \left(\text{Série de Riemann avec } p = \frac{1}{2} \leq 1 \right)$$

\Rightarrow L'intervalle de convergence est $[-1, 5)$.

9. [2 pts] a) Développez la fonction $f(x) = \frac{2}{1+3x}$ en série de puissances de x (série de MacLaurin).

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+3x} &= \frac{2}{1-(-3x)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n \quad \text{si } |-3x| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2(-3)^n x^n \quad \text{si } |x| < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) Étant donné la série $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n}$,

(i) donnez un développement en série pour $g'(2)$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{3^n} \\ \Rightarrow g'(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} n^2}{3^n} \end{aligned}$$

(ii) et un autre pour $\int_0^2 g(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^2 \frac{nx^n}{3^n} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n x^{n+1}}{3^n (n+1)} \right]_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n 2^{n+1}}{(n+1) 3^n}. \end{aligned}$$