MAT 1722 A. Hiver 2014. Mercredi 5 février. 8h30–9h50 Prof. Damien Roy

Examen de mi-session 1

SOLUTIONS – VERSION A –

NOM de famille: ________________________

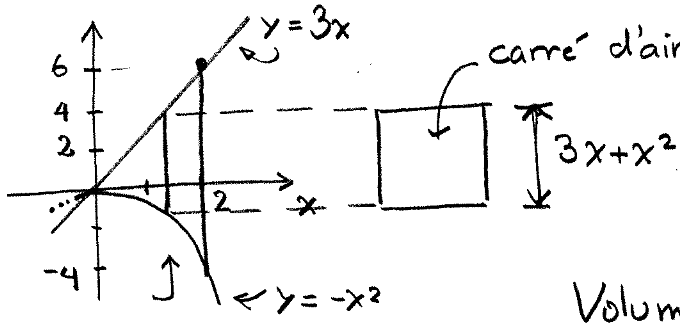
Prénom: ________________________

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (Texas Instruments TI-30, TI-34 et Casio fx-260, fx-300) sont autorisées. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- Les questions 1 à 4 sont à choix multiples et valent chacune 2 points. Encercler la réponse correcte.
- Les questions 5 et 6 sont à réponses brèves et valent chacune 2 points. Inscrire vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Les questions 7 et 8 sont à développement et valent chacune 4 points. Elles requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution.
- L'examen est noté sur 20.

Tâchez de ne pas mettre plus de 8 minutes (en moyenne) sur les questions 1 à 6, de sorte à réserver autour de 30 minutes pour les questions 7 et 8 qui valent davantage.

1. [2 pts] Déterminez le volume du solide à fond plat dont la base est la région bornée du plan délimitée par les courbes $y = 3x$, $y = -x^2$ et $x = 2$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés.

A) 32.3   B) 54.4   C) 87.3   D) 114.1   E) 144.5   F) 165.6



carré d'aire $A(x) = (3x + x^2)^2$

$= 9x^2 + 6x^3 + x^4$

$$\text{Volume} = \int_0^2 A(x)\,dx$$

$$= \left[3x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{x^5}{5} \right|_0^2$$

$$= 54.4$$

2. [2 pts] En appliquant la méthode d'Euler avec pas de $h = 0.5$, estimez $y(4)$ où y est la solution du problème de Cauchy $y' = x^2 - y$, $y(3) = 7$.

A) 9.25   B) 9.625   C) 9.75   D) 10.005   E) 10.125   F) 10.25

$x_0 = 3$, $y_0 = y(3) = 7$

$x_1 = 3.5$, $y(3.5) \cong y_1 = y_0 + (x_0^2 - y_0) \times 0.5$

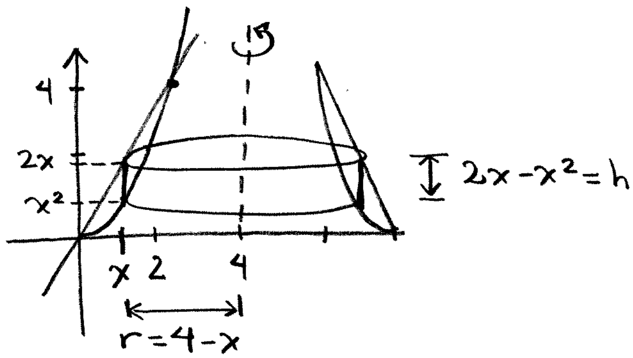
$= 7 + (3^2 - 9) \times 0.5 = 8$

$x_2 = 4$, $y(4) \cong y_2 + (x_1^2 - y_1) \times 0.5$

$= 8 + (3.5^2 - 8) \times 0.5 = 10.125$

3. [2 pts] Calculez le volume du solide de révolution obtenu par rotation autour de la droite verticale $x = 4$ de la région bornée du plan délimitée par la courbe $y = x^2$ et la droite $y = 2x$.

A) $(17/3)\pi$ B) 8π C) $(19/2)\pi$ D) 14π E) $(35/3)\pi$ F) $(45/2)\pi$

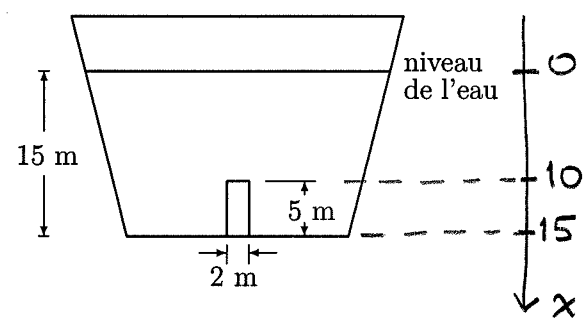


$$\text{Vol} = \int_1^2 2\pi(4-x)(2x-x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\int_1^2 (8x-6x^2+x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left[4x^2-2x^3+\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = 8\pi$$

4. [2 pts] La digue d'un barrage est percée à sa base d'une porte rectangulaire de 2 m de largeur et de 5 m de hauteur. Calculez la force hydrostatique sur la porte sachant que le niveau d'eau dans le barrage est de 15 m. On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000$ Kg/m^3 et on utilise $g = 9.8$ m/s^2 comme valeur de l'accélération à la surface de la terre.



A) 9.31×10^5 N B) 1.029×10^6 N
C) 1.127×10^6 N D) 1.225×10^6 N
E) 1.323×10^6 N F) 1.421×10^6 N

Soit x = la profondeur en mètres mesurée depuis la surface

- Aire de la portion de porte entre x et $x+\Delta x$:

  $\Delta S = 2\Delta x$

- Pression sur cette portion: $\Delta P \cong \rho g x \Delta S = 2\rho g x \Delta x$
- Pression totale:

$$P = \int_{10}^{15} 2\rho g x\,dx = \rho g\left[x^2\right|_{10}^{15} = 115\rho g$$

$$\cong 115 \times 9800 = 1.225 \times 10^6 \text{ N.}$$

5. [2pts] (Question à réponses brèves) On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y^2}{1+9x^2}.$$

(i) Déterminez sa solution générale.

Réponse: $y = \dfrac{1}{C - 2\arctan(3x)}$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{6\,dx}{1+9x^2}$$

On pose $u = 3x$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = \int \frac{2\,du}{1+u^2} = 2\arctan(u) + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = C - 2\arctan(3x) \quad \text{où } C = -C_1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{C - 2\arctan(3x)}}$$

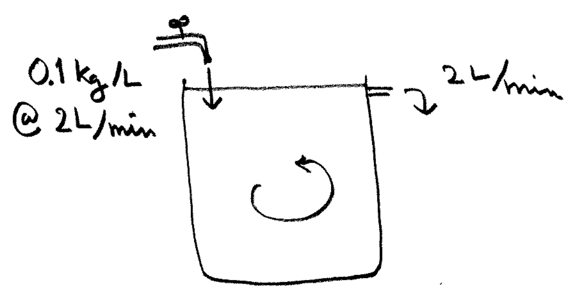
(ii) Déterminez sa solution particulière pour laquelle $y(0) = 1/3$.

Réponse: $y = \dfrac{1}{3 - 2\arctan(3x)}$

$$y(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{C - 2\arctan(0)} = \frac{1}{C} \Rightarrow \boxed{C = 3}$$

6. [2pts] (Question à réponse brève) Une citerne est remplie initialement de 300 L de saumure contenant 10 kg de sel dissous. Une autre saumure qui contient 0.1 kg/L de sel y est déversée à raison de 2 L/min. La solution est constamment brassée et évacuée au même taux de sorte que son volume total ne change pas. Soit $Q(t)$ la quantité de sel dissous (en kg) dans la citerne au temps t (en minutes). Établissez une équation différentielle pour $Q(t)$.

Réponse: $\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{30 - Q}{150}$



$$\frac{dQ}{dt} = (\text{taux entrant}) - (\text{taux sortant})$$

$$= 2 \times 0.1 - 2 \times \frac{Q}{300}$$

$$= 0.2 - \frac{Q}{150} = \frac{30 - Q}{150}$$

7. (i) [2 pts] Déterminez si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{2/3}}\,dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez sa valeur exacte. **Attention à la rédaction.** En particulier, prenez soin aux signes d'égalités et aux limites.

Solution: En posant $u = 8-x$, on trouve $du = -dx$, $x = 8-u$ et

$$\int \frac{x}{(8-x)^{2/3}}dx = \int \frac{8-u}{u^{2/3}}(-du) = -8\int u^{-2/3}du + \int u^{1/3}du$$
$$= -24u^{1/3} + \frac{3}{4}u^{4/3} + C$$
$$= -24(8-x)^{1/3} + \frac{3}{4}(8-x)^{4/3} + C$$

$$\Rightarrow \int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{2/3}}dx = \lim_{t\to 8^-}\int_0^t \frac{x}{(8-x)^{2/3}}dx$$
$$= \lim_{t\to 8^-}\left(\left(-24(8-t)^{1/3} + \frac{3}{4}(8-t)^{4/3}\right) - \left(-24\cdot 8^{1/3} + \frac{3}{4}\cdot 8^{4/3}\right)\right)$$
$$= 24\times 2 - \frac{3}{4}\times 16 = \boxed{36}$$ L'intégrale est convergente.

(ii) [2 pts] À l'aide d'un test de comparaison, déterminez si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2\sqrt{x}+3}{x^2+2x}\,dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez un majorant de sa valeur. Justifiez clairement chaque étape de votre raisonnement.

Solution: Pour $x \in [1,\infty)$, on a $2\sqrt{x} \leqslant 2\sqrt{x}+3 \leqslant 5\sqrt{x}$

et $x^2 \leqslant x^2+2x \leqslant 3x^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{x}}{3x^2} \leqslant \frac{2\sqrt{x}+3}{x^2+2x} \leqslant \frac{5\sqrt{x}}{x^2} = \frac{5}{x^{3/2}}$$

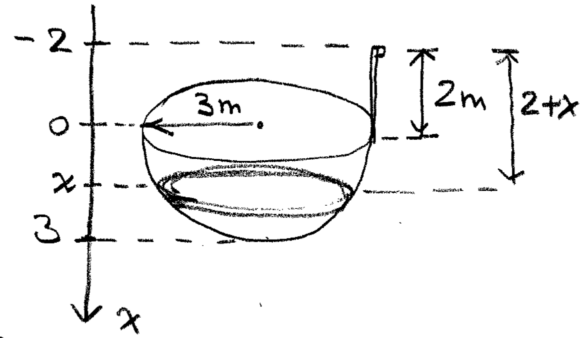
$$\text{et} \int_1^\infty \frac{5}{x^{3/2}}dx = 5\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{5}{3/2-1} = 10$$

$\Rightarrow$ L'intégrale est convergente et

$$\int_1^\infty \frac{2\sqrt{x}+3}{x^2+2x}dx \leqslant 10.$$

8. [8 pts] Un réservoir a la forme d'un hémisphère de 3 m de rayon, ouvert vers le haut, et il est rempli d'eau. Calculez le travail requis pour pomper toute son eau à 2 m au-dessus du réservoir. (On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000$ Kg/m^3 et que $g \cong 9.8$ m/s^2.)

Décrivez en mots les variables qui entrent dans votre solution et indiquez sur un dessin leur signification.

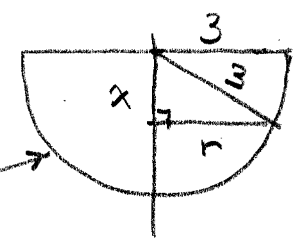


Soit x la profondeur en mètres mesurée depuis la surface du réservoir.

La section horizontale du réservoir à la profondeur x est un disque de rayon

$$r = \sqrt{3^2 - x^2}$$

par le théorème de Pythagore appliqué au triangle-rectangle



$\Rightarrow$ aire de cette section $= \pi r^2 = \pi(9 - x^2)$

$\Rightarrow$ Volume de la couche d'eau comprise entre x et $x + \Delta x$

est $\quad \Delta V \cong \pi r^2 \Delta x = \pi(9 - x^2)\Delta x$

$\Rightarrow$ Poids de cette couche :

$$\Delta P = 9.8 \times 1000\, \Delta V \cong 9800\pi(9 - x^2)\Delta x$$

$\Rightarrow$ Travail pour pomper cette couche à 2m au-dessus du réservoir

$$\Delta W = (\text{hauteur}) \times (\text{poids}) \cong 9800\pi(9 - x^2)(2 + x)\Delta x$$

Donc

$$W = \int_0^3 9800\pi(9 - x^2)(2 + x)\,dx = 9800\pi \int_0^3 (18 + 9x - 2x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 9800\pi\left(18x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right|_0^3 = 9800\pi\,\frac{225}{4} \cong \boxed{1.732 \times 10^6 \text{ J}}$$