

MAT 1741A Examen final

le 16 dcembre 2011 Durée: 180 minutes.

Professeur: Thierry Giordano.

Nom de famille: _____

Prénom: _____

Numéro d'étudiant(e): _____

VEUILLEZ LIRE CES INSTRUCTIONS TRÈS ATTENTIVEMENT:

1. Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes ni aucun livre. Aucune calculatrice, aucun système de communication électronique ne sont autorisés.
2. Vous avez 3 heures pour écrire cet examen.
3. Les questions 1 à 10 sont des QCM. Elles valent 1 points chacune. Il n'y a pas de crédit partiel. Veuillez inscrire vos réponses sur CETTE page.
4. Les questions 11 à 15 sont à développer. Elles valent chacune 6 points. Vous devez justifier et rédiger vos réponses correctement pour obtenir le nombre de points maximum. Utilisez le dos des pages si nécessaire.
5. La question 16 est une question bonus et elle vaut 4 points. Vous ne devriez étudier cette question qu'après avoir terminé toutes les autres.
6. Vérifiez vos réponses si cela est possible.
6. **Good luck! Bonne chance!**

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
sous-total	
11	
12	
13	
14	
15	
16 (bonus)	
Total	

1. Soit $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \right\}$. Alors,

A. W est un sous-espace de \mathbb{R}^3 .

B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ et W n'est pas stable sous la multiplication par les scalaires.

C. W est stable sous l'addition, mais W n'est pas stable sous la multiplication par les scalaires.

D. W est stable sous l'addition et sous la multiplication par les scalaires.

E. W n'est pas stable sous l'addition, mais est stable sous la multiplication par les scalaires.

F. Aucun des énoncés ci-dessus n'est vrai.

2. Considérons la matrice augmentée $[A|b]$ du système $Ax = b$ et supposons qu'elle est équivalente à la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Parmi les énoncés ci-dessous, lequel est vrai?

- A. Le système est incompatible.
- B. $X = (5, -2 - s, 1)$ est solution pour toute valeur de s
- C. $X = (5, -2, 1)$ est l'unique solution du système
- D. $X = (5s, -2s, s)$ est solution pour toute valeur de s
- E. $X = (5t, -2 - s, s)$ est solution pour toute valeur de s et t
- F. $X = (5, -3, 1)$ est l'unique solution du système

3. Considérons un système inhomogène de 12 équations à 15 inconnues. Répondre alors aux trois questions suivantes:

- Le système peut-il être incompatible?
- Le système peut-il être compatible indéterminé?
- Le système peut-il être compatible déterminé?

- A. non, oui, non.
- B. oui, oui, oui.
- C. oui, oui, non.
- D. non, non, non.
- E. oui, non, oui.
- F. non, non, oui.

4. Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Parmi les énoncés ci-dessous, lequel est vrai?

- A. A^{-1} n'existe pas.
- B. La troisième ligne de A^{-1} est $[-1 \ -1 \ 1]$.
- C. La deuxième ligne de A^{-1} est $[1 \ 2 \ -1]$.
- D. La première ligne de A^{-1} est $[2 \ 0 \ -1]$.
- E. La deuxième colonne de A^{-1} est $[0 \ 2 \ -1]^t$.
- F. Toutes les réponses B, C, D, E sont exactes.

5. Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & x \end{bmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice A est-elle inversible?

A. $x \neq -1$

B. $x \neq 1$

C. $x \neq 0$

D. $x = -1$

E. $x = 1$

F. $x \neq \pm 1$

6. Pour quelle valeur de t , le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$ appartient-il à l'espace engendré par les trois

vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- A. 0
- B. 4
- C. 7
- D. 11
- E. 13
- F. 15

7. La dimension de $K = \{A \in \mathbb{M}_{33}(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$ est:

- A. 0
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 6
- F. 9

8. Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ci-dessous, deux sont des sous-espaces. Trouver lesquels?

$$S = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(1)f(2) = 0\},$$

$$T = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(-x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}\},$$

$$U = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(1) > 1\},$$

$$V = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(6) = 0\}.$$

A. T et U .

B. T et V .

C. S et T .

D. S et V .

E. S et U .

F. U et V .

9. Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. La dimension de l'espace des lignes de

A est:

- A. 4
- B. 3
- C. 2
- D. 1
- E. 0
- F. Infinie

10. Si $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et D est une matrice de format $3 \times m$ alors la deuxième ligne de la matrice produit CD est

- A. n'est définie que si $m = 2$.
- B. la même que la première ligne de D .
- C. la même que la deuxième ligne de D .
- D. la somme des première et troisième lignes de D .
- E. la somme de deux fois la deuxième ligne de D et de la troisième ligne de D .
- F. égale à deux fois la première ligne de D .

11. Un patient doit prendre 5 unités de vitamine A, 13 unités de vitamine C et 23 unités de vitamine D par jour. Il a à disposition des pilules de marque I, II et III qui contiennent chacune les vitamines suivantes:

	I	II	III
vitamine A	1	1	0
vitamine C	2	1	1
vitamine D	4	3	1

Les pilules ne peuvent pas divisées.

- a) Déterminer le système d'équations linéaires et les contraintes sur les variables décrivant toutes les combinaisons possibles de pilules de chaque marque qui lui fourniront la quantité exacte requise de vitamines.

N'oubliez pas de définir vos variables. NE RÉSOLVEZ PAS CE SYSTÈME.

(Cela sera fait sous (b), mais ne copiez pas simplement le système linéaire de (b), sinon vous n'obtiendrez pas de points pour cela).

b) La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée du système (a) est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

En donner la solution générale (Ne tenez pas compte maintenant des contraintes).

- c) Trouver toutes les combinaisons possibles des pilules de type I, II et III qui fournissent la quantité exacte requise de vitamines.
- d) Si le coût par pilule de type I, II et III est respectivement de 4, 2 et 3 cents, déterminer le choix qui minimise le coût total journalier pour le patient et indiquer le coût minimum.

12. Considérons le sous-espace de \mathbb{R}^4 engendré par le système de générateurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Extraire une base de W du système de générateurs ci-dessus.

b) Trouver une base orthogonale B de W .

c) Trouver la meilleure approximation dans W du vecteur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Étendre la base B de W en une base de \mathbb{R}^4 .

13. Considérons la matrice A de format (3×3) donnée par $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- a) Calculer $\det(A - \lambda I_3)$ et montrer que les valeurs propres de A sont 2 et -1 .
- b) Trouver une base de $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 2x\}$.
- c) Trouver une base de $E_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = -x\}$.
- d) Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale et donner cette matrice diagonale D . Expliquer la raison pour laquelle la matrice P choisie est inversible.
- e) Trouver une matrice inversible $Q \neq P$ telle que $Q^{-1}AQ = \tilde{D}$ est aussi diagonale et donner cette matrice diagonale \tilde{D} .

14. Considérons la matrice de format (3×4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) Trouver une base de l'espace des colonnes $\text{Col}(A)$ de A .
- b) Donner une description géométrique complète de $\text{Col}(A)$.
- c) Trouver une base du noyau $\ker T$ de la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$T(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^4.$$

- d) Calculer $\dim(\ker T) + \dim(\text{im } T)$.

15. a) Soit A une matrice à coefficients réels de format $(n \times n)$. Donner trois énoncés différents et équivalents à

$$\text{“det } A \neq 0\text{”},$$

en utilisant:

(I) les colonnes de A

(II) la forme échelonnée réduite de A

(III) le système homogène $Ax = 0$.

15b) Dans chaque cas, montrer que l'énoncé ci-dessous est vrai ou donner un exemple explicite (un exemple numérique!) qu'il est faux.

i) Si A et B sont des matrices de format (2×2) , alors $\det(A + B)$ est toujours égal à $\det A + \det B$.

ii) Si A est une matrice de format (13×13) telle que $A^2 = 0$, alors A n'est pas inversible.

iii) Les colonnes d'une matrice de format (3×4) sont toujours linéairement dépendantes



16. (Quatre points bonus) Vous ne devriez étudier cette question qu'après avoir terminé toutes les autres.

Soit A une matrice de format (3×3) telle que $A = -A^t$ (c'est-à-dire A est anti-symétrique). Démontrer que si $A \neq 0$, alors le rang de A est 2 exactement.