MAT 1732, Hiver 2015, Devoir 1
Dû le jeudi 29 janvier avant 19 h.
Les devoirs en retard ne seront pas acceptés.

Instructeur: Abdelkrim Elbasraoui

Prénom et Nom : Caroline Tippins Numéro d'étudiant : 7691410

En signant ci-dessous, vous déclarez que ce travail est le vôtre et que vous n'avez pas copié d'une autre source.

Signature : Caroline Tippins

QUESTION 1. Calculez

(a) $\int_1^2 \frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2}\,ds$

$= \int_1^2 (1 + s^{-3/2})\,ds$

$= \left[s + \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^2$

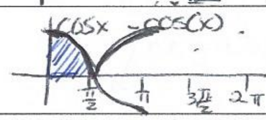
$= \left[s - \frac{2}{\sqrt{s}}\right]_1^2$

$= \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{1}}\right)$

$= 3 - \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\boxed{= 3 - \sqrt{2}}$

(b) $\int_0^\pi \frac{1}{2}\Big(\cos(x) + |\cos(x)|\Big)\,dx$



$|\cos(x)| \begin{cases} \cos(x) & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ -\cos(x) & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

$\frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(x))\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos(x))\,dx$

$= \frac{1}{2}[\sin(x)]_0^\pi + \frac{1}{2}[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}[-\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= \frac{1}{2}(0-0) + \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(0+1)$

$= 0.5 + 0.5$

$\boxed{= 1}$

QUESTION 2. Calculez

$U = 4 + 3\sin(z) \quad dU = 3\cos(z)dz$

$\frac{du}{3} = \cos(z)dz$

(a) $\int_0^{\pi} \frac{\cos(z)}{\sqrt{4+3\sin(z)}} dz$

$\int \frac{dU}{3\sqrt{U}}$

$= \frac{1}{3}\left[2\sqrt{U} + C\right]$

$= \frac{1}{3}\left[2\sqrt{4+3\sin z}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{4+3\sin\pi}\right) - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{4+3\sin 0}\right)$

$\boxed{= 0}$

(b) $\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$

$U = 1 + e^{2x} \quad du = e^{2x}(2)\,dx$

$\frac{du}{2} = e^{2x}dx$

$\int \frac{du}{2(U)}$

$= \frac{1}{2}\ln(U) + C$

$= \left[\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})\right]_0^{\ln(\sqrt{3})}$

$= \frac{1}{2}\ln(1+e^{2\ln(\sqrt{3})}) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2(0)})$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(4) - \ln(2)\right]$

$\boxed{= \ln(2)^{\frac{1}{2}}}$

QUESTION 3. Le montant d'un produit chimique produit varie selon l'équation différentielle $\frac{dP}{dt} = 5te^{-t}$ avec une condition initiale $P(0) = 2$, où t représente le temps en minute et P est mesurée en moles. Combien de ce produit chimique est produit entre les temps $t = 5$ et $t = 10$?

$dP = 5te^{-t}dt$

$\frac{dP}{dt} = 5te^{-1}$

$P(0) = 2$

Intervale = $T = 5$ et $T = 10$

$P = \int (5te^{-t})dt$ $\quad u = 5t \quad du = 5dx$ $\quad dv = e^{-t} \quad v = e^{-t}(-1)$

$= -5te^{-t} - \int -5e^{-t}dx$

$= -5te^{-t} - 5e^{-t} + C$

$= -5te^{-t} - 5e^{-t} + 2$

Si $P(0) = 2$

$2 = 0 + 0 + C$

$\boxed{C = 2}$

Pour trouver le montant de produit chimique produit entre 5min et 10min:

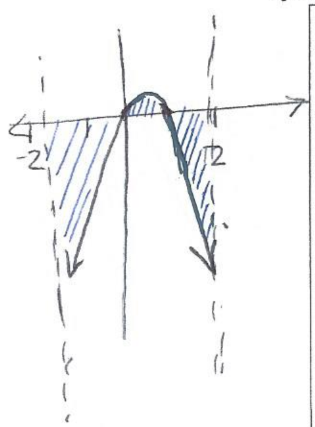
$P = \left[-5te^{-t} - 5e^{-t} + 2\right]_5^{10}$

$= \left(-5(10)e^{-(10)} - 5e^{-(10)} + 2\right) - \left(-5(5)e^{-5} - 5e^{-5} + 2\right)$

$\boxed{= 0.1996}$

$\therefore$ 0,1996 mol de produit chimique était fabriqué entre $t = 5$min et $t = 10$min.

QUESTION 4. Calculez l'aire totale entre les courbes $y = x - x^2$, $x = -2$, $x = 2$ et l'axe des x.



$0 = x(x-1)$ la courbe y a des racines à 0 et 1

Intervales d'intégration $[-2, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$

$$A = \int_{-2}^{0} (0 - (x - x^2))\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^2 - 0)\,dx + \int_{1}^{2} (0 - (x - x^2))\,dx$$

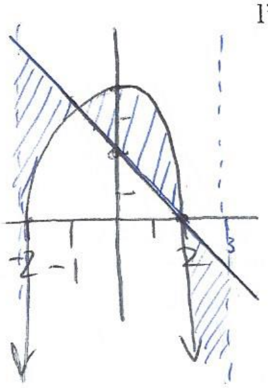
$$= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} + \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}$$

$$= +2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{16}{3} + 1 - \frac{2}{3}$$

$$\boxed{= \frac{17}{3}}$$

QUESTION 5. Trouvez l'aire de la région bornée par les courbes $y = 4 - x^2$ et $y = 2 - x$ sur l'intervalle $[-2, 3]$.



Points d'intersection

$$4 - x^2 = 2 - x$$
$$= x^2 - x - 2$$
$$= (x-2)(x+1)$$

à $x = 2, -1$

Intervales d'intégration $[-2, -1], [-1, 2], [2, 3]$

$$A = \int_{-2}^{-1} \left(2 - x - (4 - x^2)\right) dx + \int_{-1}^{2} \left(4 - x^2 - (2 - x)\right) dx + \int_{2}^{3} \left(2 - x - (4 - x^2)\right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[4x - \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} + \left[2x - \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{3}$$

$$= \left[-2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[-2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{3}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(4 - 2 - \frac{8}{3}\right) + \left(4 + 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(-6 - \frac{9}{2} + 9\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(-2 + \frac{8}{3}\right) + \left(6 - \frac{8}{3}\right) + \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(3 - \frac{9}{2}\right) + \left(6 - \frac{8}{3}\right)$$

$$= 17 - \frac{11}{2} - \frac{10}{3}$$

$$\boxed{= \frac{49}{6}}$$

QUESTION 6.

(a) Utilisez une approximations finies pour estimer l'aire de la région sous la courbe de la fonction $f(x) = \ln(x+1)$ entre $x = 0$ et $x = 1$ en utilisant une somme de droite avec quatre rectangles de largeur égale.

$D_4 = \Delta x \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right)$

$\Delta x = \frac{1-0}{4} = 0.25$ $\quad x_0 = 0;\ x_1 = 0.25;\ x_2 = 0.50;\ x_3 = 0.75;\ x_4 = 1$

$D_4 = 0.25\left(f(0.25) + f(0.50) + f(0.75) + f(1)\right)$

$= 0.25\,(1.881371628)$

$\boxed{\simeq 0,47}$

(b) Utilisez une approximations finies pour estimer l'aire de la région sous la courbe de la fonction $f(x) = \ln(x+1)$ entre $x = 0$ et $x = 1$ en utilisant une somme de gauche avec quatre rectangles de largeur égale.

$D_4 = \Delta x \left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right)$

$= 0.25\left(f(0) + f(0.25) + f(0.50) + f(0.75)\right)$

$= 0.25\,(1.8822447)$

$\boxed{\simeq 0,297}$

(c) Calculez $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$.

$u = x+1$

$du = dx$

$\int \ln(u)\,du$ $\quad f(x) = \ln u \quad f'(x) = \frac{1}{u}du$

$= \left[\ln u\,(u) - \int du\right]$ $\quad g'(x) = du \quad g(x) = u$

$= \left[\ln(x+1)(x+1) - (x+1)\right]_0^1$

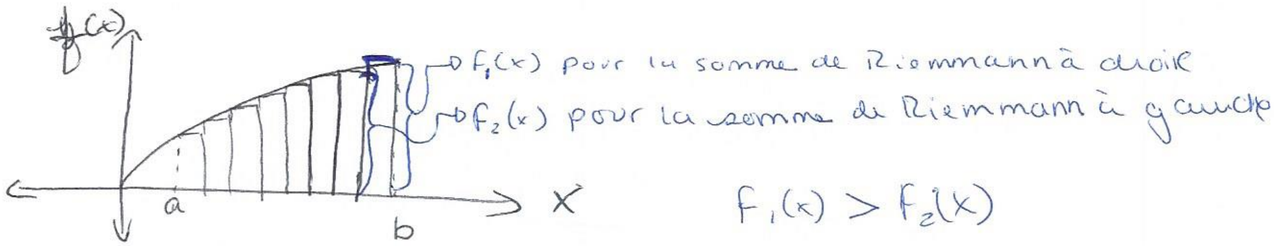
$= \left[\ln(2)(2) - (2)\right] - \left[\ln(1)(1) - (1)\right]$

$\boxed{\simeq 0,39}$

(d) Comparez vos réponses de (a), (b) et (c). Laquelle des sommes de Riemann sous-estime la valeur actuelle de $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$, et laquelle des sommmes de Riemann la sur-estime ? Pourquoi ? (Une courte explication suffira)

(b) sous-estime la valeur de l'intégrale et (a) sur-esime la valeur de l'intégrale

Ceci est le cas car la somme de Riemann à droite prends une plus grosse valeur pour la hauteur des rectangles ($f(x)$) et à gauche elle prends la valeur la plus petite de $f(x)$



alors c'est pour cela que :

$0.47 > 0.39 > 0.297$

$D_4 > \int_0^1 \ln(x+1) > D_4$