1) A) $C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $(I_2 - C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}$

$$(I_2 - C) = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I_2 - C)^{-1} = \frac{1}{(0,8)(1)-(0,5)(0,6)} \begin{bmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{0,5} \begin{bmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$(I_2 - C)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1,2 \\ 1 & 1,6 \end{bmatrix}$$

c) $\vec{d} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = C\,\vec{x} + \vec{d}$

$= \vec{x} - C\,\vec{x} = \vec{d}$

$= (I_2 - C)\,\vec{x} = \vec{d}$

$\vec{x} = (I_2 - C)^{-1}\,\vec{d}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1,2 \\ 1 & 1,6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 440 & AGRICULTURE \\ 420 & CONSTRUCTION \end{matrix}$

2) a) la base pour col (A) sont les colonnes pivots de A qui sont la première, deuxième, et la quatrième colonne donc :

Base col (A) : $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ , $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$ , $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Le rang de A noté : r g (A) = 3

b) Ax = 0, $x_1$ = -5$x_3$

$x_2$ = 2$x_3$

$x_3$ = $x_3$

$x_4$ = 0,

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} = x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4$$ , la base Nul (A) est : $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Dim Nul (A) est 1

3) a) U = $\left\{ \begin{bmatrix} 2a + c \\ a - 2b \\ a - c \end{bmatrix} \middle| \quad , \quad a, b, c \in R \right\}$

$$\begin{bmatrix} 2a + c \\ a - 2b \\ a - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} = a\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\vec{V} \in L\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

Donc, U = L $\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$ et d'où U est un sous-espace de $R^3$

b) V = $\begin{bmatrix}a^2\\b-a\\a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^2\\-a\\a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\b\\0\end{bmatrix}$

Pour a = 1 et b = 2

On a $\vec{U} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ ∈ V , pour C = 4, on a : $4\,\vec{U}$ $\begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}$ $\notin$ V, car $4^2$ ≠ 4

Donc, V n'est pas fermé pour la multiplication scalaire et d'où V n'est pas un sous espace de $R^3$

4) a) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}$ = -3, calculez $\begin{vmatrix}-a & -d & -g\\ c & f & i\\ 2b-c & 2e-f & 2h-i\end{vmatrix}$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2}$$

$$\begin{vmatrix} -a & -d & -g \\ c & f & i \\ 2b & 2e & 2h \end{vmatrix} \quad L_3 \to \frac{1}{2}L_3 \ (2) \begin{vmatrix} -a & -d & -g \\ c & f & i \\ b & e & h \end{vmatrix} \quad L_1 \to -L_1 \ (-1)\ (2) \begin{vmatrix} a & d & g \\ c & f & i \\ b & e & h \end{vmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_2 \ (-1)\ (-1)\ (2) \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Transposez le déterminant devient :

$$(-3)\ (-1)\ (-1)\ (2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$$

b) soient A, B et C des matrices d'ordre 3 avec det A= -2, det B = -3

det (-2 A $C^{-1}$ $B^2$ $A^T$ $B^{-1}$ $C^2$) = 32, Calculez le det C

$(-2)^3$ det (A $C^{-1}$ $B^2$ $A^T$ $B^{-1}$ $C^2$)

32 = $(-2)^3$ det (A) det ($C^{-1}$) det (( $B^2$) det ($A^T$) det ($B^{-1}$) det ($C^2$)

32 = $(-2)^3$ det (A) $\frac{1}{\det C}$ (det ( $B$))$^2$ det A $\frac{1}{\det B}$ (det ( $C$))$^2$

32 = $(-2)^3$ det (A) det (B) det (A) det (C)

det (C) = $\frac{32}{(-2)^3\,(-2)^2)(-3)}$

det (C) = $\frac{1}{3}$