

MAT 1741 Introduction à l'algèbre linéaire.

Automne 2014

1 Mardi 23 septembre 2014

Matrice

Définition

Une matrice (de nombres réels) de taille $m \times n$ est une liste de $m \times n$ nombres réels arrangés dans m lignes et n colonnes.

Notation:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

Terminologie:

- a_{ij} est dit l'élément de A dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne
- On dit que A est de taille $m \times n$.

Définition

L'ensemble des matrices (réelles) de taille $m \times n$ est

$$M_{m,n} = \{A \mid A \text{ est une matrice } m \times n\}.$$

Opérations canoniques:

1. Addition: Soient $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ et $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}$. On définit

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

2. Multiplication scalaire: Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ et $k \in \mathbb{R}$. On définit

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij}).$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Est-ce que les opérations suivantes sont bien définies? Si oui, calculer.

1. $A + B$ et $A + C$
2. $2A$ et $0C$

On a

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+2 & -1+0 & 0+0 \\ 0+1 & 5+1 & 6+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$A + C$ n'est pas définie car les deux matrices sont de tailles différentes.

$$\begin{aligned} 2A &= 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*1 & 2*(-1) & 2*0 \\ 2*0 & 2*5 & 2*6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De même,

$$0A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Théorème

L'ensemble $M_{m,n}$ des matrices de taille $m \times n$ muni des opérations canoniques est un espace vectoriel.

Démonstration:

- Les deux opérations sont fermées (F1 et F2).
- E1: La matrice nulle est $0 = (0)$ (c'est-à-dire une matrice de zéros), puisque

$$A + 0 = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = A.$$

- E2: L'opposé de $A \in M_{m,n}$ est $(-1)A$, puisque

$$(-1)A + A = (-a_{ij}) + (a_{ij}) = (-a_{ij} + a_{ij}) = (0) = 0.$$

- Les axiomes A1 - A6 sont faciles à démontrer.

Sous-espaces vectoriels

Si V est un espace vectoriel, nous pouvons souvent trouver un sous-ensemble $W \subset V$ tel que W est aussi un espace vectoriel si on utilise les mêmes opérations que sur V .

Exemple

\mathbb{R}^2 est un espace vectoriel, et $W = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ est aussi un espace vectoriel (vu comme exemple) lorsqu'on utilise les mêmes opérations canoniques dans \mathbb{R}^2 . On dit alors que W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

Définition

Soit V un espace vectoriel. Un sous-ensemble $W \subset V$ est appelé un **sous-espace vectoriel de V** si W est un espace vectoriel (F1,F2,E1,E2,A1-A6) lorsqu'on utilise les mêmes opérations que sur V .

Théorème[Zéro et Opposé]

Soit V un espace vectoriel. Soit $\mathbf{u} \in V$ et $-\mathbf{u}$ son opposé dans V . Si $\mathbf{0}$ est le vecteur nul de V , alors

- $0 \mathbf{u} = \mathbf{0}$

- $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$.

Théorème[Test du sous-espace vectoriel]

Soit V un espace vectoriel et soit W un sous-ensemble de V . Alors W est un sous-espace de V si et seulement si :

1. $\mathbf{0} \in W$ (c.-à-d. le vecteur zéro est aussi dans W)
2. W est fermé pour l'addition: $\mathbf{u} \in W, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$
3. W est fermé pour la multiplication par un scalaire: $k \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow k\mathbf{u} \in W$

Démonstration:

- On a E1, F1 et F2. A1 à A6 sont satisfaites puisque les éléments de W sont des éléments de V .
- Soit $w \in W$. Par F2, on a $(-1)w \in W$ et on sait que $(-1)w = -w$ tel que $-w + w = 0$. Alors, E2 est vérifiée.

Exemple

- Montrez que $W = \{f \in F([0, 1]) \mid f(0) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $F([0, 1])$.
- Montrez que $W = \{f \in F([0, 1]) \mid f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $F([0, 1])$.

Sous-espace engendré

Notation

Soit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs d'un espace vectoriel V . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ est

$$\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\} = \{c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p \mid c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}\}.$$

Théorème

Soit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs d'un espace vectoriel V . Alors, $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est un sous-espace de V .

N.B.

On dit que $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est le sous-espace de V engendré par $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$.

Exemple

Démontrer que le sous-ensemble suivant de \mathbb{R}^3 est un sous-espace vectoriel :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}.$$

2 Jeudi 25 septembre 2014

Rappel:

- Soit V un espace vectoriel et soit $W \subset V$. On dit que W est un sous-espace de V si W est aussi un espace vectoriel.
- Est-ce que \mathbb{R}^2 un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ? Non, car \mathbb{R}^2 n'est pas un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 .
Par exemple, $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ mais $(1, 0) \notin \mathbb{R}^3$.

- Soit V un espace vectoriel et $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$. On a démontré que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \{a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_k \mathbf{v}_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\},$$

est un sous-espace vectoriel de V .

- $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ est dit **l'ensemble générateur** de $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$.
- $\mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ est dit le sous-espace **engendré** par $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$.

Exemple

Soit $M_{2,2}$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 . Considérons le sous-ensemble de $M_{2,2}$ des matrices diagonales de taille 2×2 :

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démontrer que W est un sous-espace de $M_{2,2}$ et obtenir un ensemble générateur de W .

Droite dans un espace vectoriel**Définition**

Soit V un espace vectoriel V et soient $\mathbf{v}_0, \mathbf{v} \in V$ tel que \mathbf{v} est non-nul. Le sous-ensemble

$$\{\mathbf{w} \in V \mid \mathbf{w} = \mathbf{v}_0 + k \mathbf{v}, k \in \mathbb{R}\}$$

de V est dit une droite passant par \mathbf{v}_0 avec vecteur directeur \mathbf{v} .

Exemple

Soit V un espace vectoriel. Démontrer que toute droite passant par l'origine est un sous-espace de V .

Plan dans un espace vectoriel

Définition

Deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont dits **parallèles** (ou **colinéaires**) s'il existe un scalaire k tel que $\mathbf{u} = k \mathbf{v}$.

Définition

Soit V un espace vectoriel et soient $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ tel que \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont des vecteurs non-nuls et non-colinéaires. Le sous-ensemble

$$\{\mathbf{w} \in V \mid \mathbf{w} = \mathbf{v}_0 + k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$$

de V est dit un plan passant par \mathbf{v}_0 avec vecteurs directeurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Exemple

- Soit V un espace vectoriel. Démontrer que tout plan passant par l'origine est un sous-espace de V .
- Considérons $W = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0\}$. Déterminer un ensemble générateur de W et décrire W géométriquement.

Exemple

Soit V un espace vectoriel. Démontrer que $\{\mathbf{0}\}$ est un sous-espace de V .

Ensemble générateur de \mathbb{R}^n et \mathbb{P}_n **Exemple**

- Soient \mathbf{e}_i , $1 \leq i \leq n$, les vecteurs dans \mathbb{R}^n décrits comme ci-dessous:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Démontrons que $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

- Soit $\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$. Démontrons que $\mathbb{P}_n = \mathcal{L}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Remarque

L'ensemble générateur d'un espace vectoriel n'est pas unique.

Exemple

- Démontrer que $\{(1, 2), (1, 1)\}$ est un ensemble générateur de \mathbb{R}^2 .
- Est-ce que $\{1 + x, x^2\}$ engendre \mathbb{P}_3 ?

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs

Théorème

Soit V un espace vectoriel et $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$.

1. $U = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est un sous-espace vectoriel de V .
2. Si W est un sous-espace vectoriel de V tel que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset W$, alors $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset W$.
En d'autres mots : $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est le "plus petit" sous-espace vectoriel de V qui contient $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Exemple

Démontrer que $\mathbb{P}_2 = \mathcal{L}\{x^2 - x, x + 5, 2\}$.

3 Mardi 30 septembre 2014

Dépendance et indépendance linéaire

Rappel

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = l\vec{u}$. (k, l scalaires).

En d'autres mots :

Il existe des scalaires $a, b \in \mathbb{R}$, au moins un de ces deux scalaires est non-nul, tel que

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}.$$

La contreposée de cet énoncé est aussi très importante :

Deux vecteurs sont non-collinéaires si et seulement si $a\vec{u} + b\vec{v} = 0$ implique $a = b = 0$.

Remarque

Les notions de dépendance linéaire et d'indépendance linéaire seront des généralisations de la collinéarité.

Définition

Soit V un espace vectoriel et soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ des vecteurs appartenant à V . On dit que l'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ est *linéairement indépendant*, si l'équation

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

n'admet que la solution $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

- L'équation (1) admet toujours la solution $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Alors elle est dite la **solution triviale**.
- S'il existe une solution non-triviale, c'est-à-dire au moins un c_i est non-nul pour $i = 1, \dots, k$, alors on dit que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ est **linéairement dépendant**.

Remarque

Soit $D = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ un sous-ensemble **linéairement dépendant** d'un espace vectoriel V . Alors, on peut écrire au moins un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres vecteurs dans D .

Exemple

Puisque,

$$(0, 0, 0) = 2(3, 3, 1) - 6(1, 1, 1/3) + 0(1, 2, 3)$$

alors

$$\{(3, 3, 1), (1, 1, 1/3), (1, 2, 3)\}$$

est un ensemble linéairement dépendant et on a

$$(1, 1, 1/3) = (1/3)(3, 3, 1) + 0(1, 2, 3).$$

Exemple

Déterminer si les ensembles suivants sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

1. $\{(1, 0), (0, 1)\}$ dans \mathbb{R}^2 ,
2. $\{(1, -1), (1, 1)\}$ dans \mathbb{R}^2 ,
3. $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ dans \mathbb{R}^2 ,
4. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ dans $M_{2,2}$,
5. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ dans $M_{2,2}$,
6. $\{1, \sin x, \cos x\}$ dans $F([0, 2\pi])$,
7. $\{1, \cos^2 x, \sin^2 x\}$ dans $F([0, 2\pi])$,
8. $\{(1, 2, 1)\}$ dans \mathbb{R}^3 ,
9. $\{(1, 2, 3, -2), (0, 0, 0, 0)\}$ dans \mathbb{R}^4 .

Théorème

Soit V un espace vectoriel.

- Si $\mathbf{v} \in V$, $\{\mathbf{v}\}$ est linéairement indépendant $\Leftrightarrow \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
- Tout ensemble de vecteurs de V qui contient le vecteur $\mathbf{0}$ est linéairement dépendant.

Théorème

Soit V un espace vectoriel et $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$. Soit $H = \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ engendré par S .

- Si S est linéairement dépendant, c'est-à-dire un vecteur de S , disons \mathbf{v}_k , est une combinaison linéaire des autres vecteurs dans S . Alors l'ensemble des vecteurs de S amputé de \mathbf{v}_k est aussi générateur de H .

Remarque

Le dernier théorème montre qu'un ensemble générateur linéairement dépendant peut être réduit de taille.

Exemple

$W = \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 3, 0)\}$, mais $(2, 3, 0)$ est une combinaison linéaire de $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. Donc,

$$W = \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 3, 0)\} = \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

Exemple

Montrez que

$$\mathcal{L}\{(1, 1), (1, -1), (7, -1)\} = \mathcal{L}\{(1, 1), (1, -1)\}.$$

Théorème [Théorème Fondamental]

Soit V un espace vectoriel tel que $V = \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ est un ensemble linéairement indépendant de V , alors $m \leq n$.

Remarque

- **Conséquence du théorème:** Un ensemble qui contient plus de vecteurs qu'un ensemble générateur doit être linéairement dépendant.
- **ATTENTION :** Le théorème ne fait aucune observation sur les ensembles qui contiennent moins de vecteurs qu'un ensemble générateur.

Base**Définition**

Soit V un espace vectoriel et $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. On dit que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une **base** de V si

1. $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
2. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est linéairement indépendant.

Exemple

Démontrez que les ensembles suivants sont une base pour leurs espaces vectoriels respectifs.

1. $\{(1, 0), (0, 1)\}$ dans \mathbb{R}^2 ;
2. $\{(1, -1), (1, 1)\}$ dans \mathbb{R}^2 ;
3. $\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ dans $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$;
4. $\{1, \cos x, \sin x\}$ dans $\mathcal{L}\{1, \cos x, \sin x\} \subset F([0, 2\pi])$.

Base Canonique de \mathbb{R}^n

Définition

Soient \mathbf{e}_i , $1 \leq i \leq n$, les vecteurs dans \mathbb{R}^n décrits comme ci-dessous:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ est dit la **base canonique** de \mathbb{R}^n .

Exemple

- $\{(1, 0), (0, 1)\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^2 .
- $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Base Canonique de \mathbb{P}_n

Définition

L'ensemble $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ de polynômes de \mathbb{P}_n est dit la base canonique de \mathbb{P}_n .

Exemple

- $\{1, x\}$ est la base canonique de \mathbb{P}_1 .
- $\{1, x, x^2\}$ est la base canonique de \mathbb{P}_2 .
- $\{1, x, x^2, x^3\}$ est la base canonique de \mathbb{P}_3 .

Exemple

Démontrer que $\{1, 1 + x, x^2 + x\}$ est une base de \mathbb{P}_2 .

Remarque

Une base n'est pas unique!!

- $\{1, x, x^2\}$ et $\{1, 1 + x, x^2 + x\}$ sont des bases pour \mathbb{P}_2 .
- $\{(1, 0), (0, 1)\}$ et $\{(1, -1), (1, 1)\}$ sont des bases pour \mathbb{R}^2 .

4 Jeudi 2 octobre 2014

Question:

Est-ce que toutes les bases de V contiennent le même nombre d'éléments ?

Théorème[Théorème d'invariance]

Soit V un espace vectoriel et supposons que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ sont des bases de V . Alors, $n = m$.

Démonstration:

- $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ est une base de V , alors $V = \mathcal{L}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Puisque $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est linéairement indépendant, alors $n \leq m$ par le théorème fondamental.
- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de V , alors $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Puisque $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ est linéairement indépendant, alors $m \leq n$ par le théorème fondamental.

Donc $n = m$.

Définition

Soit V un espace vectoriel. S'il existe une base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ pour V (c.à.d. on peut trouver un ensemble fini de vecteurs de V qui est une base), on dit que la **dimension** de V est n , et on écrit $\dim V = n$.

Autrement (c.à.d. on ne peut pas trouver un ensemble fini de vecteurs de V qui est une base), on dit que V est de **dimension infinie**, et on écrit $\dim V = \infty$.

Par convention, $\dim \{0\} = 0$.

Exemple

- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, puisque $(1, 0), (0, 1)$ est une base de \mathbb{R}^2 .
- $\dim \mathbb{R}^n = n$, puisque $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de \mathbb{R}^n .
- $\dim M_{2,2} = 4$ puisque

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base pour $M_{2,2}$.

• $M_{p,q} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{array} \right) \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel et $\dim M_{p,q} = pq$.

• $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$, $\dim S = 2$ puisque $\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est une base de S .

• $\dim \mathbb{P}_2 = 3$, puisque $\{1, x, x^2\}$ est une base de \mathbb{P}_2 .

• $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$, puisque $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ est une base de \mathbb{P}_n .

• $V = F(\mathbb{R})$ (ou $V = F([a, b])$), $\dim V = \infty$.

Preuve : Supposons que $F(\mathbb{R})$ est de dimension $n < \infty$. Alors tout ensemble linéairement indépendant d'éléments de V contient au plus n éléments. Par contre, voici un ensemble linéairement indépendant d'éléments de V qui contient $n + 1$ éléments : $\underbrace{\{1, x, x^2, \dots, x^n\}}_{n+1 \text{ éléments}} \subset F(\mathbb{R})$. Ceci contredit le fait que $\dim V = n$. D'où, $\dim F(\mathbb{R}) = \infty$.

Lemme d'indépendance

Soit $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ un ensemble linéairement indépendant dans l'espace vectoriel V . Si \mathbf{w} un vecteur de V tel que $\mathbf{w} \notin \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$, alors $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est linéairement indépendant.

Démonstration:

Considérons l'équation

$$c \mathbf{w} + c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Supposons que $c \neq 0$, donc

$$\mathbf{w} = -\frac{c_1}{c} \mathbf{v}_1 - \frac{c_2}{c} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{c_p}{c} \mathbf{v}_p \in \mathcal{L}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}.$$

C'est une contradiction, alors $c = 0$. Donc, l'équation (2) devient

$$c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

D'où $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$, par l'indépendance de $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$. Ainsi, $c = c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$.

Construction d'une base

Théorème

Soit V un espace vectoriel à dimension finie et soit H un sous-espace de V .

1. $\dim H \leq \dim V$.
2. Tout ensemble S de vecteurs dans H qui est **linéairement indépendant** peut-être élargi pour former une base de H .
3. Tout ensemble S de vecteurs dans H qui **engendre** H contient une base de H .

Remarque:

- Le nombre de vecteurs dans un ensemble indépendant est au plus la dimension de l'espace.
- Le nombre de vecteurs dans un ensemble générateur est au moins la dimension de l'espace.
- Taille d'un ensemble l.i $\leq \dim V \leq$ Taille d'un ensemble qui engendre V .

Théorème [Théorème de la base]

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, $\dim V = n$. Alors,

1. tout ensemble linéairement indépendant de n vecteurs de V est une base de V .
2. tout ensemble générateur de V qui contient exactement n vecteurs est une base de V .

Exemple

Soit S un ensemble de vecteurs dans l'espace vectoriel V . Construire une base pour V basé sur S .

1. $V = \mathbb{P}_3$, $S = \{1, 1 + x\}$.

2. $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, -3, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 2, 3, 4)\}$.

Théorème

Soit V un espace vectoriel à dimension finie et soit H un sous-espace de V .

1. $\dim H \leq \dim V$.
2. $\dim H = \dim V \Leftrightarrow H = V$.

5 Mardi 7 octobre 2014

Équations Linéaires

Définition

Une *équation linéaire* des variables (aussi dit inconnues) x_1, x_2, \dots, x_n est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

où a_1, a_2, \dots, a_n sont des coefficients réels connus, x_1, x_2, \dots, x_n sont des inconnus (réels) et b est un terme constant réel connu.

Exemple

$$3x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 9.$$

Définition

Un *système d'équations linéaires* des variables x_1, x_2, \dots, x_n est une collection d'équations linéaires de variable x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Le système linéaire est dit $m \times n$, ou m est le nombre d'équations et n est le nombre d'inconnus.

Exemple

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

est un système linéaire 2×4 .

Définition

1. Un système linéaire $m \times n$ est dit *homogène* si $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.
2. Une *solution* du système linéaire $m \times n$ est un vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait chacune des m équations simultanément.

Exemple

On considère le système linéaire

$$\begin{array}{rcccc} 3x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

1. Est-ce que le système est homogène?
2. Déterminer si chacun des vecteurs suivants est une solution du système.
 - $(0, 0, 0, 1)$,
 - $(1, 0, 1, -2)$.

Exemple

On considère le système linéaire

$$\begin{array}{rcccc} 3x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

1. Est-ce que le système est homogène?
2. Déterminer si chacun des vecteurs suivants est une solution du système.
 - $(0, 0, 0, 0)$,
 - $(1, 0, 1, -2)$.

Remarque

$(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ est toujours une solution à un système linéaire homogène $m \times n$.

Définition

- L'*ensemble solution* d'un système est l'ensemble de tous les solutions du système.
- Une *solution générale* du système linéaire $m \times n$ est une solution qui donne une description explicite de toutes les solutions. Nous verrons qu'il y aura plusieurs façons d'exprimer une solution générale.

Exemple

1. Déterminer une solution générale du système suivant

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 & & + x_4 = 1 \\ & & 2x_3 - x_4 = 4 \end{array}$$

2. Vérifier que votre solution générale est une solution de ce système.
3. Donner une description géométrique de l'ensemble solution.

Exemple

Déterminez la solution générale pour chacun des systèmes linéaires suivants.

1.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\x_2 + x_3 &= 5 \\x_3 &= 1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1 \\2x_1 + 2x_2 &= 1\end{aligned}$$

Définition

Un système linéaire est dit *incompatible* s'il ne possède pas de solutions. Autrement on dit qu'il est *compatible*.

Théorème

Un système linéaire avec coefficients réels (ou complexes) a exactement une des propriétés suivantes :

1. il existe une solution unique,
2. il n'existe pas de solutions,
3. il existe une infinité de solutions.

Définition

On dit que deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils possèdent le même ensemble solution.

Théorème

Si on performe une des trois opérations (élémentaires) suivantes, alors nous allons obtenir un système équivalent.

- **[Remplacement]** Remplacer une équation par sa somme avec un multiple d'une autre équation dans le système.
- **[Echange]** Interchanger deux équations.
- **[Cadrage]** Multiplier une équation par une constante non-nulle.

Exemple

Utiliser les opérations élémentaires pour simplifier le système suivant et donner une solution générale.

$$\begin{array}{rclcl} & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \end{array}$$

Notation matricielle

Définition

Considérons une matrice:

- Une ligne (aussi dite rangée) de la matrice est dite non-nulle s'il y a au moins un élément non-nul dans la ligne.
- L'élément non nul le plus à gauche d'une ligne non-nulle est dit: **élément de tête** ou **coefficient principal** de la ligne.

Exemple

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{4} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Les coefficients principaux de chaque ligne sont encadrés.

Définition

Une matrice est dite sous **forme échelonnée** si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1. Toutes les lignes non-nulles sont au-dessus de toutes les lignes nulles.
2. Chaque élément de tête d'une ligne se trouve dans une colonne à droite de l'élément de tête de la ligne précédente.

Exemple

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ est sous forme échelonnée.}$$

Définition

Une matrice est dite sous **forme échelonnée réduite** si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1. La matrice est sous forme échelonnée.
2. Chaque élément de tête d'une ligne vaut 1.
3. Chaque élément de tête d'une ligne est le seul élément non-nul de sa colonne.

Exemple

$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est sous forme échelonnée réduite.

Exemple

Pour chaque matrice, déterminer si elle est sous forme échelonnée ou forme échelonnée réduite.

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice augmentée d'un système**Remarque**

Nous allons laisser tomber les noms des variables, les "=", les "+" et ainsi de suite pour un système linéaire.

e.g.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

sera écrit sous la forme d'une *matrice augmentée du système*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

c.à.d sous la forme $(A|b)$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On dit que $A \in M_{m,n}$ est la *matrice des coefficients* et b est un élément de \mathbb{R}^m , s'il y a m équations et n variables.

Remarque

- Supposons qu'une matrice est sous forme échelonnée. Une colonne qui contient une tête de ligne est dite **colonne pivot**.

- Soit une matrice augmentée sous forme échelonnée. Une variable qui correspond à une colonne pivot est dite **variable de base** (ou variable pivot). Sinon, elle est dite **variable libre**.

Exemple

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{5} & 5 & 10 \end{array} \right]$$

x_1, x_2 sont des variables de bases et x_3 est libre.

Exemple

1. Déterminer une solution générale au système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

2. Déterminer une solution générale au système avec la matrice augmentée suivante :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 6 \end{array} \right]$$

Définition

Il y a trois opérations élémentaires sur les lignes.

1. [**Remplacement**] Remplacer une ligne par sa somme avec un multiple d'un autre ligne.
2. [**Echange**] Échanger deux lignes.
3. [**Cadrage**] Multiplier tous les éléments d'une ligne par une constante non-nulle.

Définition

Soit deux matrices A et B de même taille. On dit que A et B sont **équivalentes par rapport aux lignes** si l'on peut passer de l'une à l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$.

Théorème

Deux matrices augmentées $[A_1|b_1]$ et $[A_2|b_2]$ sont équivalentes par rapport aux lignes si et seulement si les deux systèmes correspondants sont équivalents (dans le sens qu'ils ont le même ensemble de solution).

Exemple

Démontrer que le système suivant est incompatible.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & & = 1 \\ & x_2 + x_3 & = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & & = 8 \end{array}$$

6 Jeudi 9 octobre 2014

Elimination de Gauss

Algorithme de Gauss : Soit la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

Étape 1 : Si la matrice des coefficients est 0, STOP!
e.g. Ce n'est pas le cas pour notre exemple.

Étape 2 : Trouver la colonne non-nulle la plus à gauche. et si nécessaire, permuter la ligne supérieure avec une autre ligne afin d'avoir un élément non-nul comme 1^{er} élément de cette colonne.

e.g.

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

Étape 3 : Multiplier la 1^{ère} rangée par une quantité appropriée afin d'obtenir un pivot égale à 1 dans la 1^{ère} ligne.

e.g.

$$L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

Étape 4 : Ajouter des multiples de la 1^{ère} ligne à chacune des lignes dessous, afin que chaque élément dessous le pivot soit 0.

e.g.

$$L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

Étape 5 : Les opérations pour cette 1^{ère} ligne sont terminées (pour l'instant). Nous ignorons cette première ligne et colonne et on retourne à l'étape 1.

e.g.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

Étape 1 : Ce n'est pas le cas.

Étape 2 : Pas nécessaire de permuter.

Étape 3 : Pivot est déjà un 1.

Étape 4 : e.g.

$$L_3 \rightarrow \widetilde{L_2 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Étape 5 : On recommence.

e.g.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Étape 1 : La sous-matrice $0 \rightarrow$ STOP!

La matrice des coefficients est maintenant sous forme échelonnée. On continue pour transformer la matrice sous forme échelonnée réduite.

Étape 6 : En débutant avec le pivot le plus à la droite, on additionne des multiples de sa ligne à chacune des lignes supérieures de telle sorte que le pivot soit le seul élément non-nul de sa colonne. On continue aussi pour chaque pivot de la droite vers la gauche successivement.

e.g.

$$L_1 \rightarrow \widetilde{L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La matrice des coefficients est maintenant sous forme échelonnée réduite.

Solution générale d'un système dont la matrice des coefficients est ELR :

e.g.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

1. Déterminer si le système est compatible ou non.

Si compatible,

2. Assigner des paramètres aux variables libres.

e.g. $x_3 = s$ et $x_4 = t$, où $s, t \in \mathbb{R}$

3. Exprimer les variables pivots (aussi dites de base) par rapport à ces paramètres.

e.g.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 + s + 2t \\ x_2 &= 4 - 2s - 3t \end{aligned}$$

Solution générale (forme vectorielle) :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } s, t \in \mathbb{R}$$

Remarque

Quand on applique l'algorithme de Gauss au système avec la matrice augmentée $[A|b]$ afin d'obtenir le système avec la matrice augmentée $(\tilde{A}|\tilde{b})$ (où $[\tilde{A}|\tilde{b}]$ est sous forme échelonnée réduite), les deux systèmes ont le même ensemble solution.

Exemple

- Résoudre

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

- Résoudre

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 11x_2 - 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Théorème

Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée réduite unique.

Remarque

L'algorithme de gauss fonctionne **toujours!!**.

Définition

Une **position pivot** dans une matrice A est celle qu'occupe un 1 de tête

dans la forme échelonnée réduite de A . Une colonne de A qui contient une position pivot est dite une **colonne pivot**.

Remarque

Le dernier théorème implique que le nombre de pivots dans n'importe quelle forme **EL** de A est égal au nombre de pivots dans la forme **ELR** de A .

7 Mardi 21 octobre 2014

Définition

Le *rang* de la matrice A , $rg(A)$, est défini comme étant le nombre de pivots dans une forme EL de A .

e.g.

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = 2$$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Remarque

Comme les pivots sont dans des lignes et des colonnes différentes, alors

$rg(A) \leq$ nombre de lignes de A

$rg(A) \leq$ nombre de colonnes de A .

Lien entre le rang et la solution générale

Exemple

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 := L_2 - L_1 \\ L_3 := L_3 - L_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_3 := L_3 + L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Le système est donc incompatible. On note aussi que $rg(A) = 2$ et que $rg(A|b) = 3$.

En général,

$$rg(A) \leq rg(A|b) \leq rg(A) + 1$$

Théorème

Le système $(A|b)$ est compatible si et seulement si $rg(A) = rg(A|b)$.

Exemple

Est-ce que le système suivant est compatible ? Si oui, combien de paramètres possédera-t-il ?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

Note :

Nombre de paramètres = nombre de colonnes de A - $rg(A)$

Théorème

Le système $(A|b)$ possède **une infinité de solutions** si et seulement si

1. $rg(A) = rg(A|b)$ (système est compatible),
2. $rg(A) <$ nombre de colonnes de A .

Le système $(A|b)$ possède une solution **unique** si et seulement si

1. $rg(A) = rg(A|b)$ (système est compatible),
2. $rg(A) =$ nombre de colonnes de A .

Produit matriciel

Notation : Soit A est une matrice $m \times n$

$$m \text{ lignes } \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}}$$

Définition

Soit A est une matrice $m \times n$ et B est une matrice $n \times p$. Le *produit de A et B* , dénoté AB , est la matrice $m \times p$ telle que son élément à la position (i, j) ($i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne) est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B .

Remarque

Le produit AB a un sens si et seulement si:

nombre de colonnes de A = nombre de lignes de B .

e.g.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}}_{2 \times 4}$$

Exemple

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

•

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

•

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

•

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Deux faits importants concernant le produit matriciel :

1. Le produit matriciel est non-commutatif, c.à.d. $AB \neq BA$ en général.
e.g.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. $CD = 0$ (matrice nulle) $\nRightarrow C = 0$ ou $D = 0$
e.g.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit $A = (a_{i,j})$ est une matrice $m \times n$, alors la *transposée* de A est la matrice de taille $n \times m$ et définie par $A^t = (b_{i,j})$ telle que $b_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque

$$\begin{aligned} (A + B)^t &= A^t + B^t \\ (kA)^t &= k(A^t) \\ (A^t)^t &= A. \end{aligned}$$

Propriétés:

Soit $k \in \mathbb{R}$, A, B, C des matrices telles que les sommes et les produits suivants sont bien définis. Alors,

1. $(AB)C = A(BC)$,
2. $A(B + C) = AB + AC$,

3. $(A + B)C = AC + BC$,
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$,
5. $(AB)^t = B^t A^t$,
6. $AI = A, IB = B$, ou I est la matrice identité.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

• Produit des matrice carrées :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

alors,

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} A^3 &= AAA = A(A^2) = (A^2)A \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 110 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En général, $A^k = AA^{k-1}$.

Remarque

Soit A est une matrice 2×2 ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Si on définit

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= a_{1,1} + a_{2,2} \\ \det(A) &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \end{aligned}$$

Alors,

$$A^2 - (\text{tr}(A))A + (\det(A))I = 0.$$

e.g.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \text{tr}(A) &= 1 + 4 = 5 \\ \det(A) &= 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 - 5A - 2I &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partition de matrices et produit par blocs

e.g. Soit la matrice définie par

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donc,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & C^2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A^{10^{100}} &= \begin{pmatrix} B^{10^{100}} & 0 \\ 0 & C^{10^{100}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme

$$B^{10^{100}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow C^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall k \geq 2 \end{aligned}$$

Alors,

$$A^{10^{100}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8 Jeudi 23 octobre 2014

Equations matricielles et systèmes linéaires

On considère le système suivant

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ & x_2 + x_3 & = -1 \\ x_1 + & & x_3 = 4 \end{array}$$

On peut réécrire ce système en utilisant le produit matriciel sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_b$$

$Ax = b$, équation matricielle du système

Remarque

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

où

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned} Ax &= (c_1 \ c_2 \ c_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\in \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

En général:

Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice de taille $m \times n$ telle que
 $A = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$, où $c_j \in \mathbb{R}^m$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A . Alors,

$$Ax = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n$$

c.à.d. Ax est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .

Théorème

1. Le système linéaire $Ax = b$ est compatible si et seulement si b est une combinaison linéaire des colonnes de A .
2. Le système linéaire homogène $Ax = 0$ possède une solution unique ($x = 0$) si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Exemple

Déterminez si les systèmes suivants sont compatibles et déterminez le nombre de solutions possibles.

$$1. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right),$$

$$2. \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Systemes homogènes

Soit A une matrice $m \times n$. Le système homogène $Ax = 0$ possède toujours la solution triviale $x = 0$, et peut possiblement posséder une infinité de solutions.

Définition

On définit le *noyau* de A , dénoté $\text{Nul}(A)$ (ou $\text{Ker}(A)$) par l'ensemble

$$\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

Théorème

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Alors, $\text{Nul}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration : On utilisera le test du sous-espace vectoriel.

1. $0 \in \text{Nul}(A)$?
Oui, puisque $A0 = 0$.
2. Soient $v_1, v_2 \in \text{Nul}(A)$ ($Av_1 = 0, Av_2 = 0$), $v_1 + v_2 \in \text{Nul}(A)$?
Oui, puisque $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = 0 + 0 = 0$.
3. Soit $v \in \text{Nul}(A)$ ($Av = 0$) et $k \in \mathbb{R}$, $kv \in \text{Nul}(A)$?
Oui, puisque $A(kv) = k(Av) = k0 = 0$.

Exemple

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, trouvez $\text{Nul}(A)$.

2. Résoudre le système

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array} .$$

Résultat général : Un système linéaire homogène $Ax = 0$ qui a plus de variables que d'équations, possède toujours une infinité de solutions.
nombre de paramètres libres = nombre de variables - $rg(A)$

Exemple

Calculez $\text{Nul}(A)$, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Définition

Soit A une matrice de taille $m \times n$, et soit \tilde{A} la forme **ELR** de A ($(A|0) \sim \dots \sim ((\tilde{A})|0)$). On suppose qu'il y a k paramètres s_1, s_2, \dots, s_k dans la solution générale de $(\tilde{A}|0)$, c.à.d.

$$S = \{s_1 v_1 + s_2 v_2 + \dots + s_k v_k \mid s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbb{R}\}$$

Alors, *L'ensemble fondamental des solutions* (du système $Ax = 0$) est l'ensemble $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Théorème

L'ensemble fondamental des solutions du système $Ax = 0$ forme une base pour $\text{Nul}(A)$. Par conséquent, la dimension de $\text{Nul}(A)$ est alors égale à

$$\dim(\text{Nul}(A)) = \text{nombre de colonnes de } A - \text{rg}(A).$$

9 Mardi 28 octobre 2014

Matrice Inverse

Pour les nombre réels : Si $a \neq 0$ et $ax = c$, alors $x = a^{-1}c = c/a$.

Définition

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, c.-à-d. $A \in M_{n,n}$. S'il existe une matrice $B \in M_{n,n}$ tel que

$$BA = AB = I_n,$$

alors on dit que A est **inversible**, on dit que B est l'inverse de A , et on écrit $B = A^{-1}$. Sinon, on dit que A **n'est pas inversible** (on dit aussi qu'elle est **singulière**).

Théorème

Soit une matrice $A \in M_{n,n}$. Si A est inversible, alors son inverse est **unique**.

Théorème

Soit une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2}$.

1. Si $\det(A) = 0$, alors A n'est pas inversible.
2. Si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Exemple

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que A est inversible et ensuite obtenir son inverse.

Théorème

Soit A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Théorème

Soit une matrice $A \in M_{n,n}$. La matrice A est inversible si et seulement si $A \sim I_n$.

Algorithme pour calculer A^{-1} : Soit $A \in M_{n,n}$ une matrice carrée.

- Réduire par rapport aux lignes la matrice augmentée $[A|I_n]$.
- Si A est équivalente par rapport aux lignes à I_n , alors $[A|I_n] \sim [I_n|A^{-1}]$.
- Si A n'est pas équivalente par rapport aux lignes à I_n , alors A n'est pas inversible.

Exemple

Déterminer l'inverse de A , où

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Théorème [Théorème de l'inversibilité]

Soit une matrice carrée $A \in M_{n,n}$. Les énoncés suivants sont équivalents, c'est-à-dire pour une matrice donnée A , ils sont tous vrais ou tous faux.

- a. A est une matrice inversible.
- b. A est équivalente par rapport aux lignes à I_n .
- c. A a n positions pivots.
- d. L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ n'admet que la solution triviale.
- e. Les colonnes de A forment un ensemble linéairement indépendant.
- e'. Les lignes de A forment un ensemble linéairement indépendant.
- g. L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible pour chaque \mathbf{b} de \mathbb{R}^n .
- h. Les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^n .
- h'. Les lignes de A engendrent \mathbb{R}^n .
- j. Il existe une matrice $C \in M_{n,n}$ tel que $CA = I_n$.
- k. Il existe une matrice $D \in M_{n,n}$ tel que $AD = I_n$.
- l. A^T est inversible.
- m. Les colonnes de A forment une base de \mathbb{R}^n .

m'. Les lignes de A forment une base de \mathbb{R}^n .

n. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$. (à revoir)

o. $\dim(\text{Col}(A)) = n$. (à revoir)

p. $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T) = n$.

q. $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

r. $\dim(\text{Nul}(A)) = 0$.

Conséquence:

Si A et B sont des matrices carrées telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

10 Mardi 4 novembre 2014

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice

Questions :

1. Soit $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_m)$, trouver une base (n'importe laquelle) pour V .
2. Soit $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_m)$, trouver un sous-ensemble de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ qui forme une base de V .
3. Étant donné une base \mathfrak{B} de $V \subset \mathbb{R}^n$, compléter la base \mathfrak{B} en base de \mathbb{R}^n .

Définition

Soit A une matrice $m \times n$,

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & & | \end{array} \right), \quad c_j \equiv j^{\text{ème}} \text{ colonne de } A, \quad c_j \in \mathbb{R}^m \\
 &= \left(\begin{array}{c} - & l_1 & - \\ - & l_2 & - \\ & \vdots & \\ - & l_m & - \end{array} \right), \quad l_i \equiv i^{\text{ème}} \text{ ligne de } A, \quad l_i \in \mathbb{R}^n
 \end{aligned}$$

- **L'espace des lignes** de A , $\text{Lig}(A) = \text{Row}(A) = \mathcal{L}\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$, est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- **L'espace des colonnes** de A , $\text{Col}(A) = \text{Im}(A) = \mathcal{L}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m .

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Lig}(A) &= \mathcal{L}\{(1, 3, 3, 4), (1, -1, -1, 0), (2, 1, 1, 3)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1, 3, 3, 4), (1, -1, -1, 0)\} \end{aligned}$$

$$\text{car } (2, 1, 1, 3) = \frac{3}{4}(1, 3, 3, 4) + \frac{5}{4}(1, -1, -1, 0).$$

Donc $\text{Lig}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 de dimension 2.

$$\begin{aligned} \text{Col}(A) &= \mathcal{L}\{(1, 1, 2), (3, -1, 1), (3, -1, 1), (4, 0, 3)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1, 1, 2), (3, -1, 1), (4, 0, 3)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1, 1, 2), (3, -1, 1)\} \end{aligned}$$

$$\text{car } (4, 0, 3) = (1, 1, 2) + (3, -1, 1).$$

Donc $\text{Col}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 2.

Théorème

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne changent pas l'espace des lignes, c.à.d.

$$A \sim \tilde{A} \Rightarrow \text{Lig}(A) = \text{Lig}(\tilde{A})$$

Dém : Les opérations élémentaires ne sont que des combinaisons linéaires.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &:= L_2 - L_1 \\ &\sim \\ L_3 &:= L_3 - 2L_1 \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &:= L_1 - 3L_2 \\ &\sim \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(1, 3, 3, 4), (1, -1, -1, 0), (2, 1, 1, 3)\} &= \underbrace{\mathcal{L}\{(1, 3, 3, 4), (0, 1, 1, 1)\}}_{\text{lin. ind.}} \\ &= \underbrace{\mathcal{L}\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}}_{\text{lin. ind.}} \end{aligned}$$

Théorème

1. Les lignes non-nulles d'une matrice échelonnée sont lin. ind.
2. Si \tilde{A} est une forme échelonnée de la matrice A , les lignes non-nulles de \tilde{A} forment une base de $\text{Lig}(A)$.
3. $\text{rg}(A) = \dim(\text{Lig}(A))$.

Question : Comment identifier une base pour $\text{Col}(A)$ en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Col}(A) = \mathcal{L}\{(1, 1, 2), (3, -1, 1)\}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \text{Col}(\tilde{A}) &= \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

$\text{Col}(A) \neq \text{Col}(\tilde{A})$, car $(1, 1, 2) \in \text{Col}(A)$ mais $(1, 1, 2) \notin \text{Col}(\tilde{A})$. Il faut faire attention à l'interprétation du résultat dans le calcul de $\text{Col}(A)$.

Rappel :

$$\begin{aligned} Ax = b \quad \text{est compatible} &\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) \\ &\Leftrightarrow b \text{ est une comb. lin. des colonnes de } A \end{aligned}$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose } M_1 = (c_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \tilde{M}_1 = (\tilde{c}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarquez que $\text{rg}(M_1) = 1$, donc $\{c_1\}$ est lin. ind.

On pose $M_2 = (M_1|c_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\text{rg}(M_2) = \text{rg}(M_1|c_2) = 2 \neq \text{rg}(M_1)$

$\Rightarrow c_2 \notin \mathcal{L}\{\text{colonnes de } M_1\}$

$\Rightarrow c_2 \notin \mathcal{L}\{c_1\}$

$\Rightarrow \{c_1, c_2\}$ est lin. ind.

On pose $M_3 = (M_2|c_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\tilde{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\text{rg}(M_3) = \text{rg}(M_2|c_3) = 2 = \text{rg}(M_2)$

$\Rightarrow (M_2|c_3)$ est compatible

$\Rightarrow c_3 \in \mathcal{L}\{c_1, c_2\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{c_1, c_2, c_3\} = \mathcal{L}\{c_1, c_2\}$

On pose $M_4 = (M_3|c_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, d'où $\tilde{M}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\text{rg}(M_4) = \text{rg}(M_3|c_4) = 2 = \text{rg}(M_3)$

$\Rightarrow (M_3|c_4)$ est compatible

$\Rightarrow c_4 \in \mathcal{L}\{c_1, c_2, c_3\} = \mathcal{L}\{c_1, c_2\}$. Par conséquent,

$$\text{Col}(A) = \mathcal{L}\{(1, 1, 2), (3, -1, 1)\}.$$

Résumé : Soit A une matrice $m \times n$, et \tilde{A} est une forme EL de A . Alors,

1. $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rg}(A) = \dim(\text{Lig}(A))$.
2. les lignes non-nulles de \tilde{A} forment une base de $\text{Lig}(A)$.
3. Si les pivots de \tilde{A} sont sur les colonnes j_1, j_2, \dots, j_r , alors les colonnes j_1, j_2, \dots, j_r de la matrice A forment une base de $\text{Col}(A)$.

Exemple

Trouvez une base de $\text{Lig}(A)$ et $\text{Col}(A)$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème [Théorème du rang]

Soit A une matrice $m \times n$. Alors,

- $\dim(\text{Lig}(A)) = \dim(\text{Col}(A)) = \text{rg}(A)$.
- $\text{rg}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = n$.

Remarque

nombre de colonnes pivots + nombre de colonnes non-pivots (libres) = nombre de colonnes de la matrice.

Exemple

Trouver des bases pour $\text{Lig}(A)$, $\text{Col}(A)$ et $\text{Nul}(A)$ pour la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bases pour des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n

Soit $W = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

A) Trouvez une base (n'importe laquelle) pour W .

i) Construire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ & \vdots & \\ - & v_p & - \end{pmatrix}$$

$$W = \text{Lig}(A).$$

ii) Trouver une forme EL de A , disons \tilde{A} .

iii) Les lignes non-nulles de \tilde{A} forment une base pour W .

Exemple

Trouver une base de

$$W = \mathcal{L}\{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 1), (1, 1, -1, -1), (1, 1, 2, 2)\}$$

B) Trouvez une base de W qui est un sous-ensemble de $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

i) Construire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$W = \text{Col}(A).$$

- ii) Calculer une forme EL de A , disons \tilde{A} .
iii) Identifier les colonnes pivot de \tilde{A} , et choisir ces mêmes colonnes dans A .

Exemple

Trouver une base de

$$W = \mathcal{L}\{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 1), (1, 1, -1, -1), (1, 1, 2, 2)\}$$

qui est un sous-ensemble de $\{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 1), (1, 1, -1, -1), (1, 1, 2, 2)\}$.

C) Compléter une base d'un sous-espace de \mathbb{R}^n en une base de \mathbb{R}^n .

Soit $W = \mathcal{L}\{v_1, v_2\} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}$ un sous-espace de \mathbb{R}^4 de dimension 2.

On cherche à trouver les vecteurs v_3 et v_4 tels que $\mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ soit une base pour \mathbb{R}^4 .

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -v_3- \\ -v_4- \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_3- \\ -v_4- \end{pmatrix},$$

et on veut que $\text{rg}(A)=4$, d'où $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base pour \mathbb{R}^4 . Dans ce cas, on a besoin de pivots sur la première et la quatrième colonne.

On choisit ainsi, $v_3 = (1, 0, 0, 0)$ et $v_4 = (0, 0, 0, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est de rang 4, par conséquent, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base pour \mathbb{R}^4 .

Résumé

Les sous-espaces associés à une $m \times n$ matrice A

- $\text{Lig}(A)$ est un sous-espace de \mathbb{R}^n et $\dim(\text{Lig}(A))=\text{rg}(A)$.
- $\text{Col}(A)=\text{Im}(A)=\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ est un sous-espace de \mathbb{R}^m et $\dim(\text{Col}(A))=\text{rg}(A)$.
- $\text{Nul}(A) = \text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ est un sous-espace de \mathbb{R}^n .

On a

- $\dim(\text{Nul}(A)) + \text{rg}(A) = n$.
- $\dim(\text{Nul}(A)) + \dim(\text{Lig}(A)) = n$.
- $\dim(\text{Nul}(A)) + \dim(\text{Col}(A)) = n$.
- $\dim\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} + \dim\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = n$.

Théorème

L'union d'une base de $\text{Lig}(A)$ et d'une base de $\text{Nul}(A)$ est une base de \mathbb{R}^n .

11 Jeudi 6 novembre 2014

Orthogonalité

Définition

Soient $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ des vecteurs de \mathbb{R}^n . Le produit scalaire de \mathbf{u} et \mathbf{v} est défini par

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

On dit que \mathbf{u} et \mathbf{v} sont orthogonaux si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Exemple

Considérons les deux vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 : $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$ et $\mathbf{v} = (-2, 0, 1)$. Est-ce que \mathbf{u} et \mathbf{v} sont orthogonaux?

Définition

Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n . La **norme euclidienne** de \mathbf{u} est définie par

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}.$$

Définition

Soient $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ des vecteurs de \mathbb{R}^n . On définit la distance entre les deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} par

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Exemple

Soient $\mathbf{u} = (1, 1)$ et $\mathbf{v} = (-2, 5)$ des vecteurs de \mathbb{R}^2 .

1. Calculer la norme de \mathbf{u} et la norme de \mathbf{v} .

2. Calculer la distance entre ces deux vecteurs.

Remarque

Normer un vecteur \mathbf{u} revient à obtenir le vecteur suivant

$$(1/\|\mathbf{u}\|) \mathbf{u}.$$

Ce vecteur est un vecteur unitaire (c.-à-d. de norme égale à 1) qui a le même sens et la même direction que \mathbf{u} .

Exemple

Normer les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de la question précédente.

Définition

Soit $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ un ensemble de vecteurs de \mathbb{R}^n . On dit que cet ensemble est *orthogonal* si

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Si en plus, on a $\|\mathbf{u}_i\| = 1, \forall i = 1, 2, \dots, k$, on dit que l'ensemble $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ est *orthonormé*.

Exemple

Considérons l'ensemble

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Démontrer que S est un ensemble orthogonal.

Théorème

Si $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ est orthogonal, alors

1. L'ensemble S est linéairement indépendant et forme par conséquent une base de l'espace qu'il engendre, c'est-à-dire une base de $\mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$.
2. $\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_k\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{u}_k\|^2$

. Définition

Une base d'un sous-espace W de \mathbb{R}^n qui est un ensemble orthogonal est dite une **base orthogonale**.

Exemple

1. $\{(1, 0), (0, 1)\}$ dans \mathbb{R}^2 est une base orthonormée.
2. $\{(1, 1), (1, -1)\}$ dans \mathbb{R}^2 est une base orthogonale.
3. La base canonique $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dans \mathbb{R}^n est une base orthonormée.
4. $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ est orthogonal, mais pas une base de \mathbb{R}^3 . Par contre, c'est une base de $W = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\} = \{(x, y, z) \mid -x + z = 0\}$.

Exemple

L'ensemble $\{(1, 0, 2), (-2, 0, 1)\}$ est une base orthogonale pour le plan $\mathcal{L}\{(1, 0, 2), (-2, 0, 1)\}$.

Théorème

Soit W un sous-espace de \mathbb{R}^n et soit $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ une base orthogonale de W . Chaque \mathbf{y} dans W est une combinaison linéaire des vecteurs de la base, c.-à-d.

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_p \mathbf{u}_p$$

où les poids (les coefficients de Fourier par rapport à la base orthogonale) sont donnés par

$$c_j = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j} \quad \text{pour } j = 1, \dots, p.$$

Exemple

Considérons l'ensemble

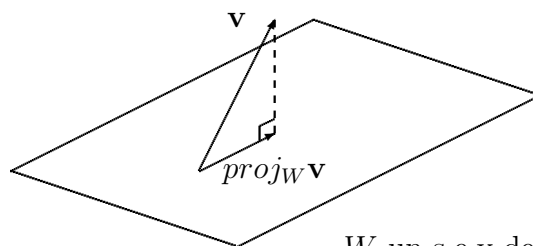
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nous avons démontré que S est un ensemble orthogonal.

1. Est-ce que S est une base orthogonale de \mathbb{R}^3 ?
2. Exprimer $\mathbf{y} = (1, 2, 3)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs de S .

12 Mardi 11 novembre 2014

Projection orthogonale



W un s.e.v de \mathbb{R}^n

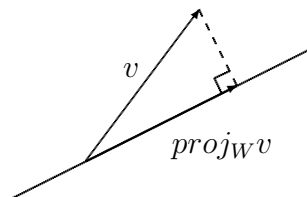
$\text{proj}_W \mathbf{v}$: projection orthogonale de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sur W .

C'est le vecteur de W qui est le "plus approché" de \mathbf{v} (meilleure approximation de \mathbf{v} par un élément de W).

Exemple

$W = \mathcal{L}\{\mathbf{u}\}$, ($\mathbf{u} \neq 0$) est la droite passant par l'origine et dirigé selon \mathbf{u} dans \mathbb{R}^n .

$$\text{proj}_W \mathbf{v} = \text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}$$



Le but est d'étendre cette notion à d'autres sous-espaces $W \subset \mathbb{R}^n$.

Définition

Soit $W = \mathcal{L}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ où $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble orthogonal. Pour $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, la **projection orthogonale** de \mathbf{v} sur W est le vecteur

$$\text{proj}_W \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2} \right) \mathbf{w}_2 + \dots + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_k}{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k} \right) \mathbf{w}_k.$$

Théorème

Soit $W = \mathcal{L}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ où $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble orthogonal. Pour $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\text{proj}_W \mathbf{v}$ est l'unique vecteur qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\text{proj}_W \mathbf{v} \in W$
2. $\mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v}$ est orthogonal à tout les vecteurs de W .
3. $\forall \mathbf{w} \in W$, on a $\|\mathbf{v} - \text{proj}_W \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$
 $\Rightarrow \text{proj}_W \mathbf{v}$ est la meilleure approximation de \mathbf{v} par des vecteurs de W .

Exemple

Soit $W = \{(x, y, z) \mid -x + z = 0\}$ et $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque, calculez $\text{proj}_W \mathbf{v}$.

13 Jeudi 13 novembre 2014

Exemple

Considérons la droite dans \mathbb{R}^3 qui passe par l'origine et de vecteur directeur $(1, 1, 1)$, $d = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$. Trouver l'ensemble des vecteurs orthogonaux à d .

Définition

Soit U un sous-espace de \mathbb{R}^n . Le complément orthogonal de U est défini par

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

En d'autres mots, U^\perp est l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^n qui sont orthogonaux à U .

Théorème

Soit U un sous-espace de \mathbb{R}^n .

1. $\mathbf{x} \in U^\perp$ si et seulement si \mathbf{x} est orthogonal à tous les vecteurs d'un ensemble générateur de U .
2. U^\perp est un sous-espace de \mathbb{R}^n .
3. $\dim(U) + \dim(U^\perp) = n$.

Théorème

Soit une matrice $A \in M_{m,n}$. Le complément orthogonal de l'espace ligne de A est l'espace nul de A et le complément orthogonal de l'espace colonne de A est l'espace nul de A^T , c'est-à-dire

$$(\text{Lig}(A))^\perp = \text{Nul}(A) \quad \text{et} \quad (\text{Col}(A))^\perp = \text{Nul}(A^T).$$

Exemple

Soit U le plan dans \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(1, 2, 1)$ et $(1, 0, 1)$. Trouver une base pour U^\perp .

Déterminant d'une matrice**Rappel**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le *déterminant* de A est le nombre réel

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Notez que $\det(A) = \det(A^t)$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, le *déterminant* de A est

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1 \end{aligned}$$

$|\det(A)|$ est le volume du parallélépipède formé par les colonnes de A .

Déterminant d'une matrice $n \times n$: développement de Laplace

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

et soit $M_{i,j}(A)$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Définition

1. Le *mineur* de l'élément $a_{i,j}$ est le déterminant de $M_{i,j}(A)$.
2. Le *cofacteur* de l'élément $a_{i,j}$, dénoté $C_{i,j}(A)$, est le nombre

$$C_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} |M_{i,j}(A)|$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 4 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a

$$M_{3,2}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 8 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Le mineur de } a_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 8 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dots = -4.$$

Le cofacteur de $a_{3,2}$:

$$\begin{aligned} C_{3,2}(A) &= (-1)^{3+2} |M_{3,2}(A)| \\ &= (-1)^5 (-4) \\ &= (-1)(-4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Définition

Le *déterminant* de A (développement de Laplace selon la 1^{ère} ligne) est défini par

$$\begin{aligned} |A| &= \det(A) \\ &= a_{1,1}C_{1,1}(A) + a_{1,2}C_{1,2}(A) + \dots + a_{1,n}C_{1,n}(A) \end{aligned}$$

Remarque

1. Le déterminant de A peut être calculé en utilisant un développement de Laplace selon n'importe quelle ligne ou colonne

$$\det(A) = a_{3,1}C_{3,1}(A) + a_{3,2}C_{3,2}(A) + \dots + a_{3,n}C_{3,n}(A) \quad (\text{selon 3^{ème} ligne})$$

$$\det(A) = a_{1,2}C_{1,2}(A) + a_{2,2}C_{2,2}(A) + \dots + a_{n,2}C_{n,2}(A) \quad (\text{selon 2^{ème} colonne})$$

2. $(-1)^{i+j}$ peut être calculé avec la matrice

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

3. Pour calculer le déterminant d'une matrice $n \times n$, on doit calculer des déterminants de matrices $(n-1) \times (n-1)$, qui, à leur tour, sont calculés avec des déterminants de matrices $(n-2) \times (n-2)$... Le processus se termine éventuellement car on sait comment calculer des déterminants de matrice 2×2 .

Exemple

1. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- i) selon la 1^{ère} ligne.
- ii) selon la 1^{ère} colonne.
- iii) selon la 3^{ème} ligne.
- iv) Calculer $\det(A^t)$

2. Calculer

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

3. Calculer

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 6 \\ 7 & -2 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Théorème

Soit A une matrice $n \times n$. Alors,

1. $\det(A) = \det(A^t)$.
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} C_{i,j}(A)$ pour n'importe quel $i = 1, 2, \dots, n$
(développement de Laplace selon la $i^{\text{ème}}$ ligne).
3. $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} C_{i,j}(A)$ pour n'importe quel $j = 1, 2, \dots, n$
(développement de Laplace selon la $j^{\text{ème}}$ colonne).
4. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est le produit des éléments sur sa diagonale.
5. Si A a une colonne nulle ou une ligne nulle, $\det(A) = 0$.

14 Mardi 18 novembre 2014

Effet des opérations élémentaires sur le déterminant

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1(18 - (-2)) + 1(-2 - 6) \\ &= 12 \end{aligned}$$

- Ajout d'une ligne à un multiple d'autres lignes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 := L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = B$$

On a

$$\begin{aligned} \det(B) &= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 6(3 - 1) \\ &= 12 \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

ou encore,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 := L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = C$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \det(C) &= 1 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(12 - 0) \\ &= 12 \\ &= \det(B) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

• Multiplication d'une ligne par un scalaire

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 := \frac{1}{6}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = D$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \det(D) &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(2 - 0) \\ &= 2 \\ &= \frac{1}{6} \det(A) \end{aligned}$$

• Permutation de deux lignes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = E$$

On a dans ce cas,

$$\begin{aligned} \det(E) &= -1 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1(18 - (-2)) - 1(-2 - 6) \\ &= -12 \\ &= -\det(A) \end{aligned}$$

Théorème

Soit $A \in M_{n,n}$.

1. Si une matrice B est obtenue en ajoutant à une ligne de A un multiple d'une autre de ses lignes, alors

$$\det(A) = \det(B).$$

2. Si B est obtenue en interchangeant deux lignes de A , alors

$$\det(B) = -\det(A).$$

3. Si B est obtenue en multipliant une ligne de A par k , alors

$$\det(B) = k \det(A).$$

Remarque

Comme $\det(A) = \det(A^t)$, les opérations élémentaires sur les lignes de A^t sont effectivement des opérations sur les colonnes de A .

Corollaire

1. Si A possède 2 lignes (ou colonnes) identiques, alors $\det(A) = 0$.
2. Si $k \in \mathbb{R}$, et A une matrice $n \times n$, alors $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Stratégie pour calculer $\det(A)$:

1. Utiliser les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes afin d'obtenir un grand nombre de 0 dans une ligne ou une colonne.
2. Utiliser le développement de Laplace selon cette ligne ou cette colonne.
3. Répéter sur les déterminants de plus petit ordre.

Exemple

$$\text{Calculer } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Déterminant et matrices inversibles

Théorème

Une matrice A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ($\det(A) \neq 0$).

Théorème

Si A et B sont des matrices $n \times n$ inversibles, alors $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Corollaire

Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

15 Jeudi 20 novembre 2014

Valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation

Les puissances d'une matrice diagonale sont faciles à calculer. Il suffit de calculer les puissances des éléments sur la diagonale.

Exemple

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Définition

Soit A une matrice $n \times n$. On dit que A est *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que

$$P^{-1}AP = D \quad \text{ou} \quad A = PDP^{-1}$$

Remarque

Si A est une matrice diagonalisable, alors ses puissances peuvent être calculées d'une façon très simple.

Soit P la matrice inversible et D la matrice diagonale t.q. $A = PDP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{10000} &= (PDP^{-1})^{10000} \\ &= \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{10000 \text{ facteurs}} \\ &= PD^{10000}P^{-1} \end{aligned}$$

Définition

Soit A une matrice $n \times n$. Le nombre λ est appelé une *valeur propre* de A s'il existe un $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, t.q.

$$Av = \lambda v.$$

Un tel vecteur v (s'il existe) est appelé un *vecteur propre* de A correspondant à la valeur propre λ .

N.B. des valeurs/vecteurs propres complexes sont possibles.

Proposition

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit λ une valeur propre de A (alors il existe au moins un vecteur $v \neq 0$ t.q. $Av = \lambda v$). On définit *l'espace propre* de A associé à λ :

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\}.$$

Alors, E_λ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , et $\dim(E_\lambda) \geq 1$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av - \lambda v = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)v = 0\} \\ &= \text{Nul}(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Puisqu'il existe au moins un $v \in E_\lambda$ tel que $v \neq 0$, alors $\dim(E_\lambda) \geq 1$.

Exemple

- a) Vérifiez que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) Est-ce que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A ?
- c) De a), on sait que 3 est une valeur propre de A . Obtenir une base pour l'espace propre de A qui correspond à la valeur propre 3 et calculer $\dim(E_3)$.
- d) Donner 3 vecteurs propres distincts correspondant à la valeur propre 3.

Question: Comment trouve-t-on les valeurs propres d'une matrice?

Réponse:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } A &\Leftrightarrow \text{Nul}(A - \lambda I) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

Définition

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On définit le *polynôme caractéristique* de A :

$$C_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Remarque

λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une racine (c'-à-d. un zéro) du polynôme caractéristique de A : $C_A(\alpha) = (\alpha - \lambda)^m p(\alpha)$ pour un certain polynôme p .

Définition

- L'entier m définit ci-haut est appelé: la *multiplicité algébrique* de la valeur propre λ .
- $\dim(E_\lambda)$ est appelé: la *multiplicité géométrique* de la valeur propre λ .

Exemple

Trouver les valeurs propres des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Théorème

Soit $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ un ensemble de vecteurs propres pour une matrice $A \in M_{n,n}$ associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, alors S est un ensemble linéairement indépendant.

Exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On sait que $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 3 et 2 respectivement. Alors, l'ensemble $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est linéairement indépendant (c'est une base de \mathbb{R}^2).

Remarque

$A \in M_{n,n}$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \in M_{n,n}$ et une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

telles que $P^{-1}AP = D$. Mais

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D &\Leftrightarrow AP = PD \\ &\Leftrightarrow [Av_1 \ Av_2 \ \dots \ Av_n] = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \dots \ \lambda_n v_n] \end{aligned}$$

Donc, v_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i pour $i = 1, \dots, n$.

Théorème

Une matrice $A \in M_{n,n}$ est diagonalisable si et seulement si elle a n vecteurs propres linéairement indépendants.

Remarque

Soit une matrice $A \in M_{n,n}$.

- Si la somme des dimensions des espaces propres de A est égale à n , alors A est diagonalisable.
- Si les n valeurs propres de A sont différentes, alors A est diagonalisable.

- Soit le polynôme caractéristique de la matrice A

$$C_A(\alpha) = (\alpha - \lambda_1)^{m_1} (\alpha - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\alpha - \lambda_k)^{m_k}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des valeurs propres de A et $m_1 + \dots + m_k = n$. Alors, A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$ pour $i = 1, \dots, k$.

Exemple

Diagonaliser les matrices suivantes (si possible)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

16 Mardi 25 novembre 2014

Transformations linéaires

Définition

Soient V et W deux espaces vectoriels. Une fonction $T : V \rightarrow W$ qui satisfait les conditions suivantes

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, pour tout $v_1, v_2 \in V$.
2. $T(kv) = kT(v)$, pour tout $v \in V$ et $k \in \mathbb{R}$,

est appelée une *transformation linéaire* de V vers W .

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et on définit

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\rightarrow T(v) = Av. \end{aligned}$$

On a,

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ 2x + y - z \end{pmatrix}.$$

T est une transformation linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 car

- i) Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, alors
 $T(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = T(v_1) + T(v_2)$.
- ii) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{R}$, alors $T(kv) = A(kv) = kAv = kT(v)$.

Exemple

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x, y) = xy$ n'est pas une transformation linéaire.

On a

$$T(1, 0) = 0 \quad \text{et} \quad T(0, 1) = 0,$$

mais

$$T((1, 0) + (0, 1)) = T(1, 1) = 1 \neq T(1, 0) + T(0, 1).$$

Exemple

Soit $V = \mathbf{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ et on définit

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow V \\ f &\rightarrow T(f(x)) = f(x+1). \end{aligned}$$

T est une transformation linéaire de $\mathbf{F}(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{F}(\mathbb{R})$ car

i) Soient $f_1, f_2 \in \mathbf{F}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} (T(f_1 + f_2))(x) &= (f_1 + f_2)(x+1) \\ &= f_1(x+1) + f_2(x+1) \\ &= (T(f_1))(x) + (T(f_2))(x) \\ &= (T(f_1) + T(f_2))(x) \end{aligned}$$

Donc, $T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$.

ii) Soit $f \in \mathbf{F}(\mathbb{R})$, et $k \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} (T(kf))(x) &= (kf)(x+1) \\ &= k(f(x+1)) \\ &= k(T(f)(x)) \\ &= (kT(f))(x) \end{aligned}$$

Donc, $T(kf) = kT(f)$.

Exemple

Soit $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + z = 0\}$. On a déjà prouvé que pour $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{proj}_W v = \left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2} \right).$$

On définit

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\rightarrow T(v) = \text{proj}_W v \end{aligned}$$

Alors, T est une transformation linéaire car

i) Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned}
 T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
 &= \left(\frac{(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)}{2}, (y_1 + y_2), \frac{(x_1 + x_2) + (z_1 + z_2)}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{x_1 + z_1}{2} + \frac{x_2 + z_2}{2}, y_1 + y_2, \frac{x_1 + z_1}{2} + \frac{x_2 + z_2}{2} \right) \\
 &= \left(\frac{x_1 + z_1}{2}, y_1, \frac{x_1 + z_1}{2} \right) + \left(\frac{x_2 + z_2}{2}, y_2, \frac{x_2 + z_2}{2} \right) \\
 &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)
 \end{aligned}$$

ii) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, et $k \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
 T(k(x, y, z)) &= T(kx, ky, kz) \\
 &= \left(\frac{kx + kz}{2}, ky, \frac{kx + kz}{2} \right) \\
 &= k \left(\frac{x + z}{2}, y, \frac{x + z}{2} \right) \\
 &= kT(x, y, z).
 \end{aligned}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On définit

$$\begin{aligned}
 T : M_{2,2} &\rightarrow M_{2,2} \\
 B &\rightarrow T(B) = BA - AB
 \end{aligned}$$

Alors T est une transformation linéaire de $M_{2,2}$ dans $M_{2,2}$ car

i) Soient $B_1, B_2 \in M_{2,2}$, alors

$$\begin{aligned}
 T(B_1 + B_2) &= (B_1 + B_2)A - A(B_1 + B_2) \\
 &= B_1A + B_2A - AB_1 - AB_2 \\
 &= B_1A - AB_1 + B_2A - AB_2 \\
 &= T(B_1) + T(B_2)
 \end{aligned}$$

ii) Soit $B \in M_{2,2}$, et $k \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} T(kB) &= (kB)A - A(kB) \\ &= k(BA) - k(AB) \\ &= k(BA - AB) \\ &= kT(B) \end{aligned}$$

Remarque

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, W un espace vectoriel et $T : V \rightarrow W$ une transformation linéaire.

Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de V et on suppose que $w_1 = T(v_1)$, $w_2 = T(v_2), \dots, w_n = T(v_n)$ sont connus. Alors, T est complètement déterminée. Soit $v \in V$, alors il existe des scalaires x_1, x_2, \dots, x_n tels que

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$$

D'où

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n) \\ &= T(x_1v_1) + T(x_2v_2) + \dots + T(x_nv_n) \\ &= x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \dots + x_nT(v_n) \\ &= x_1w_1 + x_2w_2 + \dots + x_nw_n \end{aligned}$$

Exemple

1. Trouvez une formule pour la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sachant que $T(1, 1) = (1, 0)$ et $T(1, -1) = (0, 1)$.

2. Soit $V = \mathbb{P}_2$ et $W = \mathcal{L}\{3 - 5x, 1 - x + 2x^2\}$.

a) Montrez que $6 - 11x - 3x^2 \in W$.

b) Soit $T : W \rightarrow V$ une transformation linéaire telle que $T(3 - 5x) = 2$ et $T(1 - x + 2x^2) = 1 + x$. En utilisant a), trouver $T(6 - 11x - 3x^2)$.

Définition

Soit $T : V \rightarrow W$ une transformation linéaire. On définit

$$\underbrace{\text{Nul}(T)}_{\text{noyau de } T} = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \text{ (un sous-espace de } V)$$

et

$$\underbrace{\text{Im}(T)}_{\text{image de } T} = \{T(v) \mid v \in V\} \text{ (un sous-espace de } W)$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, on définit la transformation linéaire

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\rightarrow Av \end{aligned}$$

Trouvez $\text{Nul}(T)$ et $\text{Im}(T)$.

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire, alors il existe une matrice A de taille $m \times n$ telle que $T(v) = Av$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration:

Soit

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Alors,

$$T(v) = x_1 \underbrace{T(e_1)}_{\in \mathbb{R}^m} + x_2 \underbrace{T(e_2)}_{\in \mathbb{R}^m} + \dots + x_n \underbrace{T(e_n)}_{\in \mathbb{R}^m}$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

D'où

$$T(v) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Av$$

Remarque

la matrice $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ s'appelle la *matrice canonique* de T .

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Alors,

$$\dim(\text{Nul}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = n$$

Exemple

Soit $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + z = 0\}$ et

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\rightarrow T(v) = \text{proj}_W v \end{aligned}$$

Donner la matrice canonique de cette transformation linéaire.

Exemple

Soit $u = (1, 2, -1)$ et

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\rightarrow T(v) = \text{proj}_u v = \frac{(u \cdot v)}{(u \cdot u)} u \end{aligned}$$

Calculer la matrice canonique de T , $\text{Nul}(T)$ et $\text{Im}(T)$.