

MAT1722 - Automne 2014, Devoir 3
Brent Russell Weatherall, 9/29/14 at 12:42 PM

Question 1: Score 0/2

Your response

Correct response

Un réservoir a la forme d'une pyramide à base carrée avec la pointe en bas. Sa hauteur est de 5 m, son côté à la base est de 3 m et il est rempli d'eau jusqu'à 4 m.

Un réservoir a la forme d'une pyramide à base carrée avec la pointe en bas. Sa hauteur est de 5 m, son côté à la base est de 3 m et il est rempli d'eau jusqu'à 4 m.

(i) Soit x la hauteur en mètres mesurée à partir de la pointe au fond du réservoir. Le poids en Newtons d'une mince couche d'eau entre x et $x + \Delta x$ est environ $P(x)\Delta x$. Quel est $P(x)$?

$P(x) =$ No answer (0%)

Exprimez la réponse par une formule. On rappelle que la densité de l'eau est

$\rho = 1000 \text{ Kg} / \text{m}^3$ et que l'accélération

gravitationnelle à la surface de la terre est

$g = 9.8 \text{ m} / \text{s}^2$.

(i) Soit x la hauteur en mètres mesurée à partir de la pointe au fond du réservoir. Le poids en Newtons d'une mince couche d'eau entre x et $x + \Delta x$ est environ $P(x)\Delta x$. Quel est $P(x)$?

$P(x) = 3,528x^2$

Exprimez la réponse par une formule. On rappelle que la densité de l'eau est

$\rho = 1000 \text{ Kg} / \text{m}^3$ et que l'accélération

gravitationnelle à la surface de la terre est

$g = 9.8 \text{ m} / \text{s}^2$.



(ii) Le travail en Joules requis pour pomper cette mince couche d'eau au sommet du réservoir est environ $w(x)\Delta x$. Quel est $w(x)$?

$w(x) =$ No answer (0%)

Exprimez la réponse par une formule.

(ii) Le travail en Joules requis pour pomper cette mince couche d'eau au sommet du réservoir est environ $w(x)\Delta x$. Quel est $w(x)$?

$w(x) = 3528(5-x)x^2$

Exprimez la réponse par une formule.

(iii) À l'aide des résultats précédents, déterminez, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau au sommet du réservoir. Donnez sa valeur numérique à 3 chiffres significatifs près.

Réponse: 0 (0%) Joules

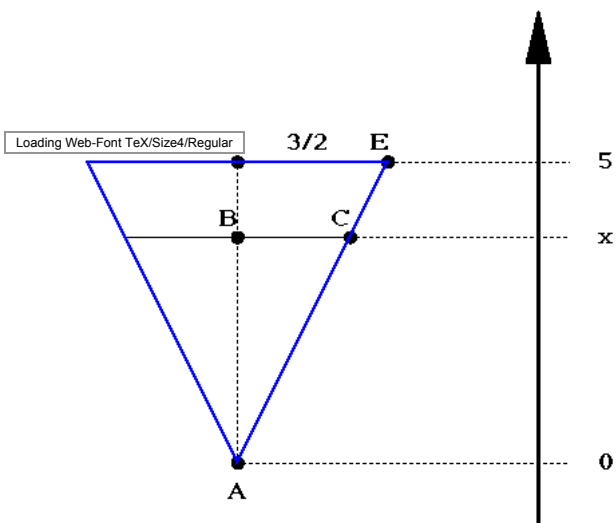
(iii) À l'aide des résultats précédents, déterminez, en Joules, le travail requis pour pomper toute l'eau au sommet du réservoir. Donnez sa valeur numérique à 3 chiffres significatifs près.

Réponse: 151,000 ± 1.0% Joules

Total grade: $0.0 \times 1/5 + 0.0 \times 1/5 + 0.0 \times 3/5 = 0\% + 0\% + 0\%$

Comment:

(i) La figure ci-dessus montre une coupe verticale du réservoir par un plan vertical passant par sa pointe et parallèle à un côté de la base.



La section horizontale de ce réservoir à la hauteur x est un carré de côté $2|BC|$. Par hypothèse, à la hauteur $|AD| = 5$ on a $|DE| = 3/2$. Comme les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle ADE$ sont semblables, on en déduit que le côté du carré à la hauteur x est

$$2|BC| = 2 \frac{|AB|}{|AD|} |DE| = \frac{x}{5} 3.$$

Donc, la couche en question s'assimile à un parallélépipède rectangle plat de hauteur Δx , dont la base est un carré de côté $3x/5$. Son volume est environ $(3x/5)^2 \Delta x$. Comme 1 m^3 d'eau pèse $1000 \text{ g} \cong 9800 \text{ N}$, le poids de cette couche est

$$9800(3x/5)^2 \Delta x = 3,528x^2 \Delta x = P(x) \Delta x$$

avec $P(x) = 3,528x^2$.

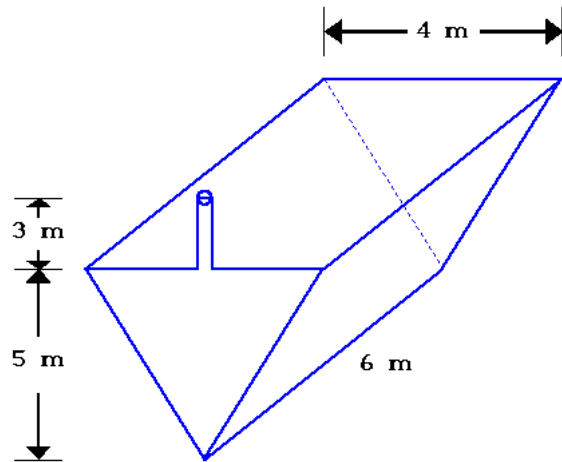
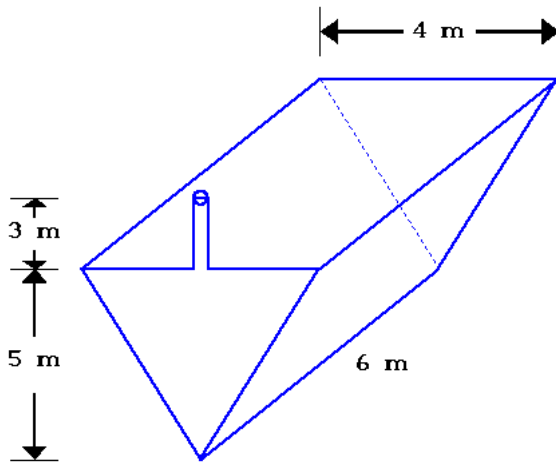
(ii) Pour pomper cette couche au sommet du réservoir, il faut la faire passer de x mètres à 5 mètres (car le réservoir mesure 5 m de hauteur). On doit donc l'élever de $5 - x$ mètres. Cela représente un travail de $(5 - x)P(x) \Delta x$ en Joules. Donc, .

(iii) Comme le réservoir est rempli d'eau seulement jusqu'à m , le travail requis est

Question 2: Score 0/2

Your response

Correct response



Incorre

Un réservoir a la forme d'un prisme droit dont les extrémités parallèles sont des triangles isocèles, comme sur la figure ci-dessus. Il fait m de haut, m de large et m de long, et il est rempli d'eau. On veut calculer le travail requis pour pomper toute son eau par le tuyau à m au-dessus du réservoir.

Un réservoir a la forme d'un prisme droit dont les extrémités parallèles sont des triangles isocèles, comme sur la figure ci-dessus. Il fait m de haut, m de large et m de long, et il est rempli d'eau. On veut calculer le travail requis pour pomper toute son eau par le tuyau à m au-dessus du réservoir.

(i) Soit la hauteur en mètres mesurée à partir du fond du réservoir. Le poids d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ est environ $\rho g (5 - x) \Delta x$. Quel est ?

No answer (0%)

Exprimez la réponse par une formule. On rappelle que la densité de l'eau est ρ et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est g .

(i) Soit la hauteur en mètres mesurée à partir du fond du réservoir. Le poids d'une mince couche d'eau entre les hauteurs x et $x + \Delta x$ est environ $\rho g (5 - x) \Delta x$. Quel est ?

47040*x

Exprimez la réponse par une formule. On rappelle que la densité de l'eau est ρ et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est g .

(ii) Le travail en Joules requis pour pomper cette mince couche d'eau à m par dessus le réservoir est environ $\rho g (5 - x) \Delta x (5 - x)$. Quel est ?

No answer (0%)

Exprimez la réponse par une formule.

(ii) Le travail en Joules requis pour pomper cette mince couche d'eau à m par dessus le réservoir est environ $\rho g (5 - x) \Delta x (5 - x)$. Quel est ?

47040*x*(8-x)

Exprimez la réponse par une formule.

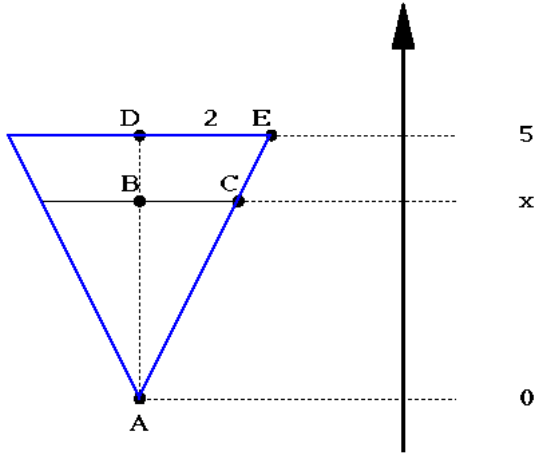
(iii) À l'aide des résultats précédents, déterminez le travail requis pour pomper toute l'eau à m par dessus le réservoir. Donnez sa valeur numérique à chiffres significatifs près. Travail (0%) Joules.

(iii) À l'aide des résultats précédents, déterminez le travail requis pour pomper toute l'eau à m par dessus le réservoir. Donnez sa valeur numérique à chiffres significatifs près. Travail 2,740,000 ± 1.0% Joules.

Total grade: $0.0 \times 1/5 + 0.0 \times 2/5 + 0.0 \times 2/5 = 0\% + 0\% + 0\%$

Comment:

(i) La figure ci-dessous montre une coupe du réservoir par un plan parallèle aux triangles d'extrémité.



La section horizontale de ce réservoir à la hauteur x est un rectangle de largeur $2x$ et de longueur 2 . Par hypothèse, à la hauteur 5 , on a 2 . Comme les triangles ABD et ACE sont semblables, on en déduit que $2x = 2(5-x)$.

Donc, pour x petit, la couche d'eau comprise entre les hauteurs x et $x+dx$ s'assimile à un parallépipède rectangle plat d'épaisseur dx , de largeur $2x$ et de longueur 2 . Son volume est environ $4x^2 dx$.

Comme l'eau pèse N , le poids de cette couche est environ $4N x^2 dx$.

avec dx .

(ii) Pour pomper cette couche à 5 m par dessus le réservoir, il faut la faire passer de x mètres à 5 mètres, donc il faut l'élever de $5-x$ mètres. Cela représente un travail de $4N x^2 (5-x) dx$ Joules,

donc $\int_0^5 4N x^2 (5-x) dx$.

(iii) Le travail requis pour pomper toute l'eau est :

Question 3: Score 0/2

Your response

Un câble qui pèse N/m sert à remonter N de minerai du fond d'un puits 90 mètres plus bas.

(i) Supposons qu'à un moment donné, 50 mètres de câble ait été remontés à la surface. Alors le travail pour en remonter 15 mètres de plus est environ 1500 Joules. Quel est x ?

No answer (0%)
Exprimez votre réponse par une formule.

(ii) Quel est, en Joules, le travail requis pour remonter le minerai à la surface? Arrondir la réponse à chiffres significatifs.
Réponse: (0%) Joules

Correct response

Un câble qui pèse N/m sert à remonter N de minerai du fond d'un puits 90 mètres plus bas.

(i) Supposons qu'à un moment donné, 50 mètres de câble ait été remontés à la surface. Alors le travail pour en remonter 15 mètres de plus est environ 1500 Joules. Quel est x ?

$(50) + ((15) * ((90) - x))$
Exprimez votre réponse par une formule.

(ii) Quel est, en Joules, le travail requis pour remonter le minerai à la surface? Arrondir la réponse à chiffres significatifs.
Réponse: **65,300 ± 1.0%** Joules



Incorrect

Total grade: $0.0 \times 1/4 + 0.0 \times 3/4 = 0\% + 0\%$

Comment:

(i) S'il y a x mètres de câble à la surface, c'est qu'il en pend $90-x$ mètres. Le poids de ces x mètres de câble est Nx . Ajouté au poids du minerai, le poids total est $N(90-x)$. Pour en remonter dx mètres de plus, le travail requis est environ $N(90-x)dx$ (car pour x petit, le poids de l'ensemble ne varie presque pas lorsqu'on remonte le câble de dx mètres). Donc, $\int_0^{15} N(90-x)dx$.

(ii) Lorsqu'on remonte la totalité du câble, la longueur à la surface passe de 0 à 90 . Donc le travail est $\int_0^{90} N(90-x)dx$.

Question 4: Score 0/2

Your response

La longueur naturelle d'un ressort est de 200 cm et il faut exercer une force de 200 N pour l'allonger à 200 cm.

(i) Déterminez, en Newtons, la force requise pour étirer le ressort de 200 mètres (par rapport à sa position au repos). Attention aux unités!
No answer (0%)

Correct response

La longueur naturelle d'un ressort est de 200 cm et il faut exercer une force de 200 N pour l'allonger à 200 cm.

(i) Déterminez, en Newtons, la force requise pour étirer le ressort de 200 mètres (par rapport à sa position au repos). Attention aux unités!
 $200 * x$



Incorrect

(ii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de cm à cm. Attention aux unités!
 Réponse: No answer (0%) Joules
 Donnez sa valeur exacte.

(ii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de cm à cm. Attention aux unités!
 Réponse: 1 Joules
 Donnez sa valeur exacte.

(iii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de cm à cm. Attention aux unités!
 Réponse: No answer (0%) Joules
 Donnez sa valeur exacte.

(iii) Déterminez, en Joules, le travail requis pour allonger le ressort de cm à cm. Attention aux unités!
 Réponse: 3 Joules
 Donnez sa valeur exacte.

Total grade: $0.0 \times 1/4 + 0.0 \times 1/4 + 0.0 \times 2/4 = 0\% + 0\% + 0\%$

Comment:

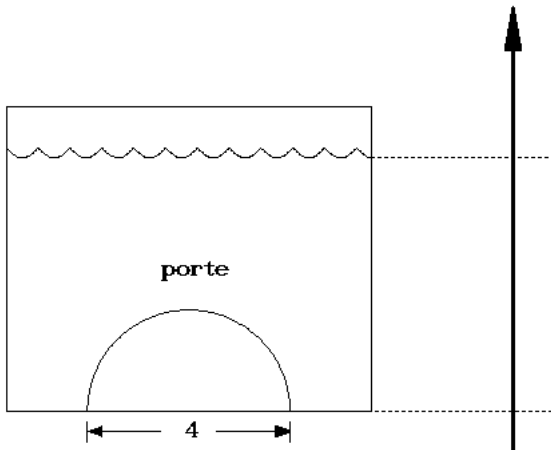
(i) La loi de Hooke donne pour une constante . Lorsqu'on allonge le ressort de cm à cm, il subit un étirement de m. Par hypothèse, on a , par suite , et donc .

(ii) L'étirement du ressort (par rapport à sa position de repos) passe de m à m. Le travail requis est donc

(iii) Dans ce cas, l'étirement du ressort passe de m à m. Le travail requis est donc

Question 5: Score 0/2

Une digue verticale retient m d'eau. Elle est percée à sa base d'une porte semi-circulaire de m de diamètre (la base de la porte est son diamètre), comme sur le dessin ci-dessous.



(i) Soit la hauteur en mètres mesurée à partir de la base de la digue. La force hydrostatique exercée par l'eau sur la portion de la porte comprise entre m et m est environ . Quel est ? On rappelle que la densité de l'eau est et que l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre est . Exprimer la réponse par une formule.

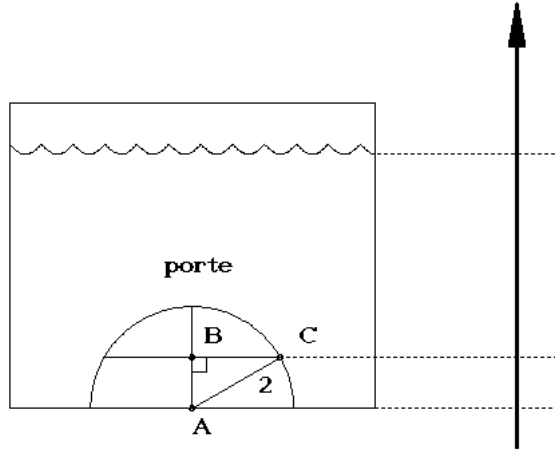


Incorrect

Your Answer: No answer

Correct Answer: $19600 \cdot (18-y) \cdot \sqrt{(2)^2 - y^2}$

Comment: La figure ci-dessous montre la digue et sa porte.



La largeur de la porte à la hauteur y est $2\sqrt{r^2 - y^2}$. Par hypothèse, r est le rayon de la porte. Comme le triangle ABC est rectangle, le théorème de Pythagore donne $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Donc, la portion de la porte comprise entre y m et $y + \Delta y$ a pour surface environ $2\sqrt{r^2 - y^2} \Delta y$. À la hauteur y , la colonne d'eau est de y mètres, donc elle exerce une pression de $\rho g y$. La force hydrostatique sur la portion de la porte est $\rho g y \cdot 2\sqrt{r^2 - y^2} \Delta y$.
Donc,

(ii)

Quelle est, en Newtons, la force hydrostatique totale qui s'exerce sur la porte? Donner la réponse à chiffres significatifs près.



Your Answer:

Correct Answer: 1,056,087.22 ± 0.1%

Comment: Puisque la porte est de hauteur r , la force totale qui s'exerce sur elle est :

Pour évaluer cette intégrale, on pose $u = r^2 - y^2$. Alors,

Comme u varie de r^2 à 0 lorsque y varie de 0 à r , l'intégrale devient

Comme $\int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2}$, on trouve

Pour la seconde intégrale, on pose $v = r - y$. Alors $dv = -dy$. Alors $\int_0^r (r - y) dy = \int_r^0 (r - (r - v)) (-dv) = \int_r^0 v dv = \frac{1}{2} v^2 \Big|_r^0 = \frac{1}{2} (0 - r^2) = -\frac{1}{2} r^2$.
On conclut que la force hydrostatique totale qui s'exerce sur la porte est

Comments: