Université d'Ottawa
Dépt. de mathematiques et de Statistiques
Calcul III pour ingénieurs
MAT 2722A - Automne 2014
Examen de pratique – Final
Professeur: Abdelkrim El basraoui

Nom:______________________________________

Numéro d'étudiant:__________________________

Instruction: (Lisez-les attentivement S.V.P.)

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant dans la première page.
- Vous avez 3 heures pour compléter cet examen.
- Cet examen **est un examen à livres fermés** qui comprend **16 questions**.
- Les 10 premières questions sont des **questions à choix multiples** qui vallent **2 points** chaque. Veuillez **inscrire votre réponse dans la table à la première page**.
- Les questions de 11 à 16 sont des **questions à développement**. Vous devez justifiez vos réponses de façon claire.
- Seules les calculatrices de base sont permises; les calculatrices graphiques ou programmables sont interdites.
- **Ne pas détacher ce livret**.
- Bonne chance!!!

1. Soit $f(x, y) = x\ln(x - 2y)$. Trouvez l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(3, 1, 0)$.
Réponse: $z = 3x - 6y - 3$.

2. Trouvez la longueur d'arc (sur l'intervalle donné) de la courbe paramétrée par la fonction vectorielle suivante

$$\vec{r}(t) = (\cos(t),\, \sin(t),\, \ln(\cos(t))) \quad , \qquad 0 \leq t \leq \pi/4.$$

3. Soit $f(x,y) = \cos(x^2y - 2y^2)$. Trouvez la dérivée directionnelle de f au point (0,0),$D_{\vec{u}}f(0,0)$, dans la direction $\vec{u} = -\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$.

Réponse: 0.

4. Est ce que le champ vectoriel suivant $\vec{F} = 2xe^{x^2}\sin(y)\vec{i} + e^{x^2}\cos(y)\vec{j}$ est conservatif? Si oui trouvez une fonction potentiel f; i.e. trouvez f telle que $\nabla f = \vec{F}$.

5. Trouvez et classifiez les points critiques de la fonction $f(x, y) = (y^2 + x^2)e^{y^2 - x^2}$.

6. Calculez l'intégrale double suivante $\int_0^1 \int_x^1 \cos(\pi y^2)\, dy\, dx$. Indication: inversez l'ordre d'intégration.

7. Considérez le champ vectoriel $\vec{F}(x,y) = (e^{x^2} - \cos(y))\,\vec{i} + (y^3 + x\sin(y) + 2xy)\,\vec{j}$ et soit C la courbe composée du demi-cercle $x^2 + y^2 = 1$ pour $y \geq 0$ orienté contre les éguilles de la montre et le segment orienté du point (-1, 0) au point (1,0). Calculez l'intégrale curviligne

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Solution: Utilisez le Thm de Green puis les coords polaires pour obtenir la valeur. 4/3.

8. Soit le solide tri-dimensionnel dans **le premier octant** borné de l'exterieur par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et de l'interieur par le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si la densité de masse est $\delta(x,y,z) = x + y$, quelle est la masse totale de ce solide?
Indication: utilisez les coords sphériques.

9. Soit S la surface orientée vers l'exterieur (positivement) du graphe $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour $1 \leq z \leq 2$ et soit le champ vectoriel

$$\vec{F} = 2xz\vec{i} - yz\vec{j} + (z - 3y^2)\vec{k}\,.$$

Calculez $\iint_S \vec{F}d\vec{S}$ en deux façons.

10. Considérez la surface S paramétrée par

$$\vec{r}(\theta, \phi) = \cos(\theta)\sin(\phi)\,\vec{i} + 2\sin(\theta)\sin(\phi)\,\vec{j} + \cos(\phi)\,\vec{k}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

Soit la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Quelle est la valeur de l'intégrale de surface $\displaystyle\iint_S f\, dS$?

11. Considérez le solide dans le premier octant borné par $z = x^2 + y^2$ et $z = 8 - x^2 - y^2$. Ce solide a une densité de masse $\delta(x, y, z) = x + y$. Trouvez le volume et la masse totale de ce solide.

12. Trouvez les extremas absolus de la fonction $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ sur le disque centré au point (0,1) et de rayon 2.

Réponse: Min abs: (0, 0). Maxs absolus: (0,-1), (0,3), $(-\sqrt{3}, 2)$, $(\sqrt{3}, 2)$.

13. Considérez le champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.
(a) Calculez la divergence de $\vec{F}$, i.e. calculez div$\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.
(b) **En utilisant le théorème de divergence d'Ostrogradski**, calculez l'intégrale de surface (flux) $\displaystyle\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, où S est la sphère orientée positivement, centrée à l'origine et de rayon 2.

14. Représentez la région d'intégration puis évaluez l'intégrale double suivante

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x+y)\,dx\,dy$$

Indication: utilisez un nouveau système de coordonnées (polaires).

15. Considérez le champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + xz^2)\,\vec{i} + (x^2y + yz^2)\,\vec{j} + (y^2z + x^2z)\vec{k}$.

(a) Montrez que le champ vectoriel $\vec{F}$ est conservatif.

(b) Trouvez une fonction potentiel pour $\vec{F}$, i.e. trouvez une fonction $f(x, y, z)$ telle que $\vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla}\, f(x, y, z)$

(c) Évaluez l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, où C est l'arc du cercle paramétré par $\vec{(}\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

16. Considérez le champ vectoriel

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz^3 - 2y)\,\vec{i} + (xz^3 + 2x)\,\vec{j} + (3xyz^2 + z^4)\,\vec{k}$$

et soit C le cercle dans le plan xOy orienté positivement, centré à l'origine et de rayon 3. Calculez l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Vous avez le choix entre un calcul direct ou l'utilisation du théorème de Stokes. L'une de ces deux méthodes est plus simple. Alors choisissez bien votre méthode.
Pour plus de pratique calculez l'intégrale avec les deux méthode.