Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

Calculs III pour ingénieurs
MAT 2722A - Automne 2014
Examen partiel II
Professeur: Abdelkrim El basraoui

Nom: Solution. # d'étudiant: ____________

Instructions: (Lisez-les attentivement S.V.P.)

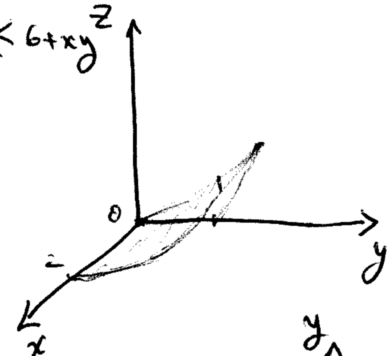
- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant dans la première page dans l'espace précisé.
- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livres fermés qui comporte **5 questions**.
- Toutes les questions sont des questions à développement. Soyez clair et brêf dans vos justifications en répondant à ces questions.
- Le pointage des questions est indiqué à la première page.
- Seules les calculatrices non programmables et non graphiques telles que la TI30X ou similaires sont permises.
- Vous avez deux pages supplémentaires à la fin que vous pouvez utiliser comme feuille de brouillon.
- **Ne pas détacher** ce livret.

BONNE CHANCE!!!

Q.1	Q.2	Q.3	Q.4	Q.5	**Total**
5	5	5	5	7	25

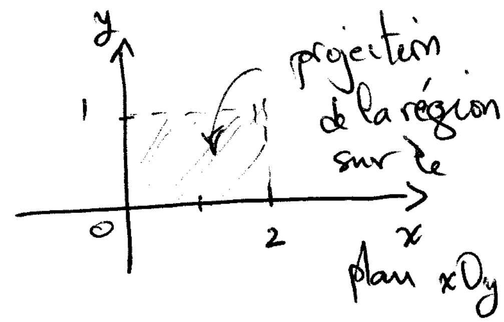
1. Soit le solide S dans le premier octant (c'est-à-dire $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$) borné par les plans $z = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ x = 2,\ y = 1$ et la surface $z = 6 + xy$. Si ce solide a une densité de masse donnée par la fonction $\delta(x, y, z) = 2x + y$, trouvez la masse totale de ce solide.

$0 \leq x \leq 2 \ ; \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq 6+xy$



$$m = \iiint_S \delta(x,y,z)\, dV$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{6+xy} (2x+y)\, dz\, dy\, dx$$



$$= \int_0^2 \int_0^1 (2x+y)(6+xy)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[12xy + 3y^2 + x^2y^2 + \frac{xy^3}{3} \right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 + \frac{37x}{3} + 3 \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{37x^2}{6} + 3x \right]_0^2$$

$$\boxed{m = \frac{100}{3}}$$

2. Évaluez l'intégrale double suivante

$$I = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{|x|}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$

Indication: représentez la région d'intégration dans le plan xOy puis exprimez cette région et l'intégrale dans un nouveau système de coordonnées.

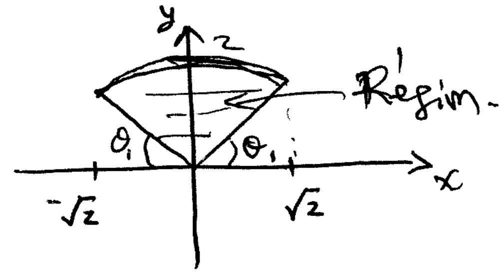
$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$|x| \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$

$\Downarrow$

$y = |x| \; ; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

$y = \sqrt{4-x^2} \; ; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$



$\therefore$ En coords polaires : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ avec : $0 \leq r \leq 2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \pi - \theta_1$

où $\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/2 \implies \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$.

$\therefore \; I = \int_0^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{r^2}\; r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r^2 dr = \frac{\pi}{2} \left[r^3/3 \right]_0^2$

$$\boxed{I = \frac{4\pi}{3}}$$

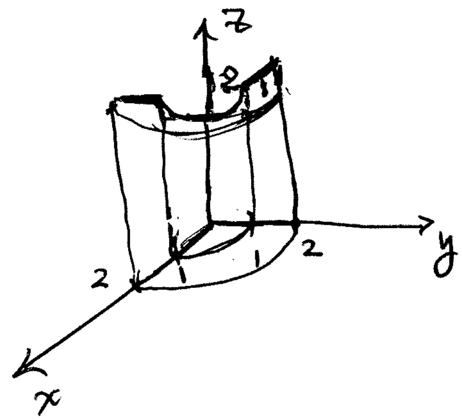
S

3. Considérez le solide dans le premier octant (c'est-à-dire $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$) borné par les plans $z = 0$, $z = 2$, $y = 0$, $x = 0$ et les surfaces $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = 4$. Ce solide a densité de masse donneée par la fonction $\delta(x, y, z) = zx^2 + zy^2$. Déterminez une intégrale triple en **coordonnées cyclindriques** qui donne la masse total de ce solide. **NE PAS ÉVALUER CETTE INTÉGRALE.**

En coordonnées cylindriques.

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$
$$z = z$$

avec : $1 \leq r \leq 2$
$0 \leq \theta \leq \pi/2$
$0 \leq z \leq 2$



et $\delta(x,y,z) = \delta(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$

$$= z(x^2+y^2) = zr^2.$$

$$\therefore \quad m = \iiint_S \delta(x,y,z)\, dV$$

$$\boxed{m = \int_0^2 \int_1^2 \int_0^{\pi/2} z r^2\, r\, d\theta\, dr\, dz}$$

4. Trouvez la longueur (sur l'intervalle donné) de la courbe paramétrisée par la fonction vectorielle suivante

$$\vec{r}(t) = 4t\,\vec{\mathbf{i}} + 2\cos(3t)\,\vec{\mathbf{j}} + 2\sin(3t)\,\vec{\mathbf{k}} \quad , \qquad 0 \leq t \leq \pi/6.$$

On a : $\vec{r}\,'(t) = 4\,\vec{i} - 6\sin(3t)\,\vec{j} + 6\cos(3t)\,\vec{k}$.

$$\Rightarrow \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{4^2 + (-6\sin(3t))^2 + (6\cos(3t))^2}$$

$$= \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\therefore \quad L = \int_0^{\pi/6} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{\pi/6} 2\sqrt{13}\,dt$$

$$\boxed{L = \frac{\pi\sqrt{13}}{3}}$$

S

5. Considérez la surface formée par la partie de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ entre les plans $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (Voir figures dans la page suivante).

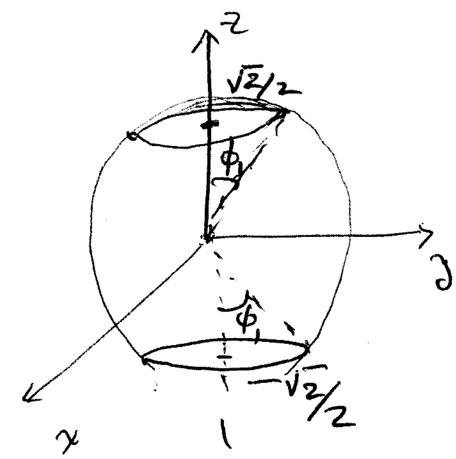
(a) Donnez une paramétrisation de cette surface.

(b) Déterminez une intégrale qui donne l'aire totale de cette surface. **NE PAS ÉVALUER CETTE INTÉGRALE.**

(c) **BONIS [2 points]** Évaluez l'intégrale dans (b). Notez que vous n'êtes éligible à recevoir des points bonis **que si vous avez la bonne réponse dans (b).**

a) En coordonnées sphériques : on a :

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases}$$



avec $\rho = 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

et $\phi_1 \leq \phi \leq \pi - \phi_1$ où $\cos(\phi_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\phi_1 = \pi/4$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq 3\pi/4$.

D'où la paramétrisation :

$$\begin{cases} x = \sin(\phi)\cos(\theta) \\ y = \sin(\phi)\sin(\theta) \\ z = \cos(\phi) \end{cases}$$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq 3\pi/4$

ou de façon équivalente on a :

$$\vec{r}(\theta,\phi) = \sin(\phi)\cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\phi)\sin(\theta)\,\vec{j} + \cos(\phi)\,\vec{k}$$

avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $\pi/4 \leq \phi \leq 3\pi/4$.

Page supplémentaire 1

b/ On a: $A = \iint_S \|\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_\phi\| \, dA$, $dA = d\phi \, d\theta$ dans ce cas.

avec $\vec{r}_\theta = -\sin(\phi)\sin(\theta)\vec{i} + \sin(\phi)\cos(\theta)\vec{j}$

et $\vec{r}_\phi = \cos(\phi)\cos(\theta)\vec{i} + \cos(\phi)\sin(\theta)\vec{j} - \sin(\phi)\vec{k}$

$\therefore \vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_\phi = -\sin^2(\phi)\cos(\theta)\vec{i} - \sin^2(\phi)\sin(\theta)\vec{j} - \sin(\phi)\cos(\phi)$

et $\|\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_\phi\| = \sin(\phi)$ car $\left\{ \begin{array}{l} \sin(\phi) \geq 0 \text{ pour} \\ \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4} \end{array} \right.$

$$\therefore A = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta$$

c/ $A = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta$

$= 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin(\phi) \, d\phi = 2\pi \left[-\cos(\phi)\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}$

$$\boxed{A = 2\sqrt{2} \cdot \pi}$$