

Nom de famille (MAJUSCULES)	_____
Prénom (MAJUSCULES)	_____
Signature	_____
Numéro d'étudiant	_____

Mat 1739 Test 2

Professeur: D. Daigle

Date: 10 novembre 2014

Durée: 75 minutes

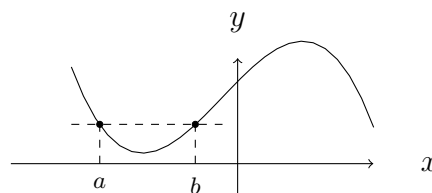
- Les manuels et notes de cours ne sont pas permis.
- **Les seules calculatrices permises sont celles qui sont approuvées par la faculté.**
- Pour les questions 1 à 4, encerclez la lettre de la bonne réponse.
Pour la question 5, écrivez votre réponse dans la boîte.
Pour les questions 1 à 5, seule la réponse compte (vous n'avez pas à expliquer ou justifier vos réponses).
- Pour les question 6 à 8, vous devez donner des solutions complètes et justifier vos affirmations. Pour avoir tous les points, votre écriture doit être lisible et votre raisonnement doit être facilement compréhensible.
- Ne détachez pas les pages de l'examen. Vous pouvez utiliser le verso des pages pour le travail au brouillon ou pour répondre aux questions si vous manquez d'espace.

Espace réservé au correcteur.

Question	1 à 5	6	7	8	Total
Note :					
note max.	10	5	5	10	30

1. Considérez le graphe de $y = f(x)$ dessiné ci-dessous.
Parmi les énoncés (a–e), lequel est vrai ?

- (a) $f'(a) < f'(b)$ ← **réponse**
 (b) $f'(a) > f'(b)$
 (c) $f'(a) = f'(b)$
 (d) $f(a) = f'(a)$
 (e) aucune de ces réponses.



2. L'équation de la droite tangente au graphe de $f(x) = e^{x^2+3x}$ en $x = 0$ est :

- (a) $y = x + 1$
 (b) $y = 3x + 1$ ← **réponse**
 (c) $y = 2x + 3$
 (d) $y = x + e$
 (e) aucune de ces réponses.

3. Si $f(x) = \sin(x^2)$ alors $f'(\sqrt{\pi})$ est égal à :

- (a) 0
 (b) $-2\sqrt{\pi}$ ← **réponse**
 (c) $2\sqrt{\pi}$
 (d) 1
 (e) aucune de ces réponses.

4. Soit $f(x) = x^3 - 27x + 1$. Le maximum global de $f(x)$ pour $0 \leq x \leq 5$ est :

- (a) 55
 (b) 1 ← **réponse**
 (c) -53
 (d) -9
 (e) aucune de ces réponses.

5. Considérez l'angle θ dans le dessin suivant :



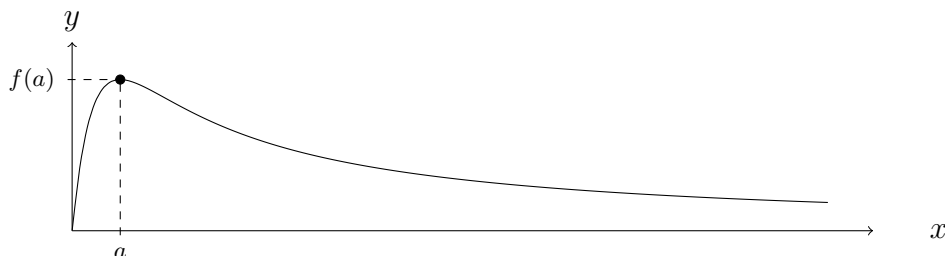
Si θ satisfait $\sin \theta = 0,2$ alors quelle est la valeur de θ ?

Réponse : (en degrés)

Questions à développer: donnez des solutions complètes.

6. (5 points) Soit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right)$, définie pour tout $x \in [0, \infty)$.

Voici à quoi ressemble le graphe de f :



Trouvez la valeur du nombre a , ainsi que celle de $f(a)$.

Solution. La question revient à demander : trouvez le nombre $a > 0$ tel que $f'(a) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) \cdot \left(\frac{-\pi \frac{d}{dx}(\pi x + 1)}{(\pi x + 1)^2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) \cdot \left(\frac{-\pi^2}{(\pi x + 1)^2}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{-\pi^2}{(\pi x + 1)^2} \neq 0$ pour tout x , on a donc

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) = 0.$$

De plus, le nombre $\frac{\pi}{\pi x + 1}$ appartient à l'intervalle $(0, \pi]$ puisque :

$$x \geq 0 \Rightarrow \pi x \geq 0 \Rightarrow \pi x + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\pi x + 1} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{\pi x + 1} \leq \pi.$$

Or, le seul nombre θ appartenant à $(0, \pi]$ et satisfaisant $\cos(\theta) = 0$ est $\theta = \pi/2$. On en déduit :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{\pi x + 1} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1/\pi.$$

On a trouvé le nombre a qu'on cherchait :

$$a = 1/\pi.$$

Enfin,

$$f(a) = f(1/\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{\pi(1/\pi) + 1}\right) = \sin(\pi/2) = 1.$$

7. (5 points) Parmi toutes les boîtes rectangulaires de volume 1 m^3 , et dont la base est quatre fois plus longue que large, quelle est celle d'aire minimale ?

Plus précisément, considérez que les dimensions de cette boîte sont

$$\text{largeur : } x \text{ m} \quad \text{longueur : } 4x \text{ m} \quad \text{hauteur : } y \text{ m}$$

et donnez les valeurs de x et y qui minimisent l'aire totale de la boîte (l'aire totale est la somme des aires des six faces de la boîte).

Solution. Volume = $x \cdot 4x \cdot y = 4x^2y$, donc $4x^2y = 1$, donc $y = \frac{1}{4x^2}$.

Aire :

$$A = 2(4x \cdot x) + 2(4x \cdot y) + 2(x \cdot y) = 8x^2 + 10xy = 8x^2 + 10x \left(\frac{1}{4x^2} \right) = 8x^2 + \frac{5}{2x}$$

Le problème à résoudre est le suivant :

Trouver le minimum global de la fonction $A(x) = 8x^2 + \frac{5}{2x}$ de domaine $(0, \infty)$.

$$A'(x) = 16x - \frac{5}{2x^2} = \frac{32x^3 - 5}{2x^2}, \text{ donc } A'(x) = 0 \Leftrightarrow 32x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5/32} = 0.539.$$

Écrivons $\alpha = \sqrt[3]{5/32} = 0.539$, alors :

x	$(0, \alpha)$	α	(α, ∞)
$32x^3 - 5$	-	0	+
$2x^2$	+	+	+
$A'(x)$	-	0	+
$A(x)$	\searrow	min	\nearrow

On voit que $A(x)$ a un minimum global en $x = \alpha$. Pour cette valeur de x on a :

$$y = \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{1}{4(\sqrt[3]{5/32})^2} = \frac{1}{4(5/32)^{2/3}} = (4/5)^{2/3} = 0.862.$$

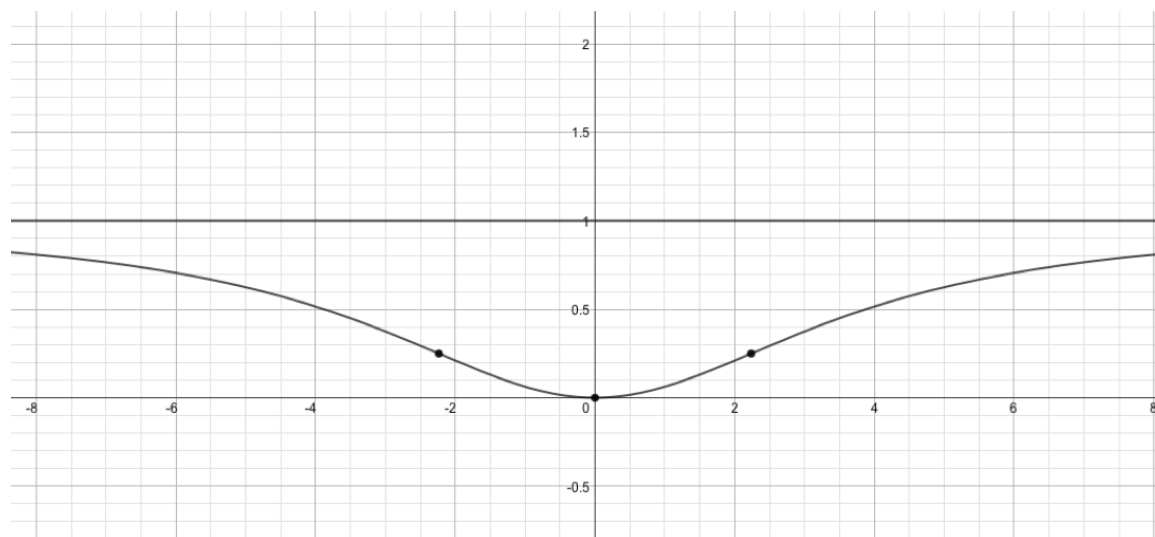
Réponse : $x = 0.539 \text{ m}$ et $y = 0.862 \text{ m}$.

Ou encore : $x = \sqrt[3]{5/32} \text{ m}$ et $y = (4/5)^{2/3} \text{ m}$.

8. (10 points) Considérez la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 15}$, de domaine \mathbb{R} .

Déterminez les points où le graphe de f coupe les axes des x et des y , déterminez les asymptotes verticales et horizontales, les intervalles de croissance/décroissance, les minima/maxima locaux/globaux, la concavité et les points d'inflexion. (Vous pouvez utiliser la page suivante pour continuer les calculs.)

Enfin, dessinez le graphe de la fonction dans la grille suivante :



Les trois points marqués sur la courbe sont :

le minimum global $(0, 0)$

les deux points d'inflexion $(-\sqrt{5}, \frac{1}{4})$ et $(\sqrt{5}, \frac{1}{4})$.

L'analyse est à la page suivante.

$f(0) = 0$, donc le graphe coupe l'axe des Y au point $(0, 0)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc $(0, 0)$ est le seul point où le graphe touche l'axe des X.

La fonction est continue en tout point de \mathbb{R} , donc il n'y a pas d'asymptote verticale.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 15} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1) = 1,$$

donc la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale pour $x \rightarrow \infty$ et aussi pour $x \rightarrow -\infty$.

On trouve :

$$f'(x) = \frac{30x}{(x^2 + 15)^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{(-90)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})}{(x^2 + 15)^3}$$

donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

x	$(-\infty, -\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5}, 0)$	0	$(0, \sqrt{5})$	$\sqrt{5}$	$(\sqrt{5}, \infty)$
$30x$	-	-	-	0	+	+	+
$(x^2 + 15)^2$	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	\searrow	\searrow	\searrow	min	\nearrow	\nearrow	\nearrow
(-90)	-	-	-	-	-	-	-
$x + \sqrt{5}$	-	0	+	+	+	+	+
$x - \sqrt{5}$	-	-	-	-	-	0	+
$(x^2 + 15)^3$	+	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	\frown	flex	\smile	\smile	\smile	flex	\frown

$(-\sqrt{5}, f(-\sqrt{5})) = (-\sqrt{5}, \frac{1}{4})$ est un point d'inflexion.

$(0, f(0)) = (0, 0)$ est le minimum global.

$(\sqrt{5}, f(\sqrt{5})) = (\sqrt{5}, \frac{1}{4})$ est un point d'inflexion.