MAT 2784
Équations Différentielles et Méthodes Numériques
Examen de mi-session
Automne 2011

Durée: 80 minutes

Nom:____________________________________

Étudiant #_______________________

Instructions:
- Ecrire votre nom et numéro d'étudiant sur cette page.
- Vérifier que votre copie de l'examen a bien 8 pages.
- L'examen comporte 6 questions pour un total de 37 points.
- Vous devez répondre à toutes les questions et donner des solutions complètes.
- Pour chaque question, écrivez la réponse immédiatement après la question dans l'espace qui est fourni. Vous pouvez utiliser le dos de la feuille, si nécessaire.
- **C'est un examen à livres fermés.**
- **Vous pouvez seulement utiliser une calculatrice de base, non programmable et sans capacité graphique.**

Question 1. (7 points) Résoudre le problème à valeur initiale suivant:

$$(6xy - 2y^2 + 3x^2y)\,dx + (6x^2 - 6xy + 2x^3)\,dy = 0, \qquad y(1) = 1\,.$$

$M(x,y) = 6xy - 2y^2 + 3x^2y$, $N(x,y) = 6x^2 - 6xy + 2x^3$

$M_y = 6x - 4y + 3x^2$, $N_x = 12x - 6y + 6x^2$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{-6x + 2y - 3x^2}{6xy - 2y^2 + 3x^2y} = -\frac{1}{y} = g(y)$$

$$\varphi(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

En multipliant l'équation de départ par y on obtient:

$$(6xy^2 - 2y^3 + 3x^2y^2)\,dx + (6x^2y - 6xy^2 + 2x^3y)\,dy = 0$$

$M(x,y) = 6xy^2 - 2y^3 + 3x^2y^2$, $N(x,y) = 6x^2y - 6xy^2 + 2x^3y$

$M_y = 12xy - 6y^2 + 6x^2y$ $\quad N_x = 12xy - 6y^2 + 6x^2y$

$M_y = N_x$ donc l'équation cidessus est exacte

$u(x,y) = 3x^2y^2 - 2y^3x + x^3y^2 + T(y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N \Rightarrow \cancel{6x^2y} - \cancel{6y^2x} + \cancel{2x^3y} + T'(y) = \cancel{6x^2y} - \cancel{6xy^2} + \cancel{2x^3y}$$

$\Rightarrow T'(y) = 0 \Rightarrow T(y) = 0$

$u(x,y) = 3x^2y^2 - 2y^3x + x^3y^2 = C$ est la solution générale

$y(1) = 1 \Leftrightarrow 3 - 2 + 1 = C \Rightarrow C = 2$

$3x^2y^2 - 2y^3x + x^3y^2 = 2$ est l'unique solution du PVI

Question 2. (9 points) Résoudre les problèmes à valeurs initiales suivants:
(a) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -13$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0, \quad \Delta = (-1)^2 - 4(-6) = 25 > 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+5}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \quad y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$$

$$\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ -2c_1 + 3c_2 = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 - c_2 = 2 \\ c_2 = \frac{-15}{5} = -3 \end{cases}$$

$\boxed{y(x) = 2e^{-2x} - 3e^{3x}}$ est l'unique solution du problème à valeurs initiales ci-dessus.

(b) $y'' + 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0, \quad \Delta = 2^2 - 4 \times 10 = -36 < 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i, \quad \lambda_2 = -1 - 3i$$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} \cos(3x) + c_2 e^{-x} \sin(3x)}$$

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y'(x) = -c_1 e^{-x}\cos(3x) - 3c_1 e^{-x}\sin(3x) - c_2 e^{-x}\sin(3x) + 3c_2 e^{-x}\cos(3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ -c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 1 \end{cases} \quad \boxed{y(x) = 3e^{-x}\cos(3x) + e^{-x}\sin(3x)}$$

(c) $x^2y'' + 9xy' + 16y = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 3.$

$$p(\lambda) = m^2 + (9-1)m + 16 = 0$$

$$p(\lambda) = m^2 + 8m + 16 = 0, \quad \Delta = 8^2 - 4\times 16 = 0$$

$$m = m_1 = m_2 = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\boxed{y(x) = c_1 x^{-4} + c_2 (\ln(x))\, x^{-4}}$$

$$y(x) = c_1 x^m + c_2 \ln(x)\, x^m$$

$$y'(x) = m c_1 x^{m-1} + c_2 \frac{1}{x} x^m + m c_2 \ln(x)\, x^{m-1}$$

$$y'(x) = c_1 m x^{m-1} + c_2 x^{m-1} + m c_2 \ln(x)\, x^{m-1}$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = 3 \end{cases}$$

$\boxed{y(x) = 3\ln(x)\, x^{-4}}$ est l'unique solution du problème à valeurs initiales $x^2y'' + 9xy' + 16y = 0 \quad x > 0$

$y(1) = 0, \quad y'(1) = 3$

Question 3. (6 points) Résoudre le problème à valeur initiale suivant:

$$y''' - 3y'' - 13y' + 15y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 10, \quad y''(0) = 18.$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 13\lambda + 15, \quad p(1) = 0$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda + b) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda - \lambda^2 - a\lambda - b$$
$$= \lambda^3 + (a-1)\lambda^2 + (b-a)\lambda - b$$

$$\begin{cases} a - 1 = -3 \\ b - a = -13 \\ -b = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -15 \end{cases}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 15) = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4(-15) = 60$$

$$\lambda_2 = \frac{2+8}{2} = 5, \quad \lambda_3 = \frac{2-8}{2} = -3$$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{5x}}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 2$$
$$y'(0) = -3c_1 + c_2 + 5c_3 = 10$$
$$y''(0) = 9c_1 + c_2 + 25c_3 = 18$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 10 \\ 9 & 1 & 25 & 18 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & -8 & & \\ & & & \end{array}\right]$$

Question 4 (7 points)
Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre le problème à valeur initiale:

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi/2), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2\,.$$

$$\mathcal{L}(y''+4y)(s) = \mathcal{L}\left(\delta(t-\tfrac{\pi}{2})\right)(s)$$

$$\mathcal{L}(y'')(s) + 4\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}\left(\delta(t-\tfrac{\pi}{2})\right)(s)$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$s^2 Y(s) - 3s - 2 + 4Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$(s^2+4)Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} + 3s + 2$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s^2+2^2} + 3\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{2}{s^2+2^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{s^2+2^2}\right)(t) + 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)(t) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2}u(t-\tfrac{\pi}{2})\sin\left(2(t-\tfrac{\pi}{2})\right) + 3\cos(2t) + \sin(2t)}$$

Question 5. (4 points) Utiliser la méthode de Newton pour trouver la deuxième solution de l'équation $e^{-x} = \sin x$ à 6 décimales près. Commencer avec $x_0 = 2.5$.

$$f(x) = e^{-x} - \sin(x)$$

$$f'(x) = -e^{-x} - \cos(x)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_0 = 2.5$$

$$x_0 = 2.5$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2.5 - \frac{f(2.5)}{f'(2.5)} = 3.21814332 4$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3.09640862$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3.09636393$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 3.0963639\ldots$$

$$\boxed{r \simeq 3.096363}$$

Question 6. (4 points) Utiliser l'interpolation itérée de Newton pour trouver le polynôme d'interpolation $p_n(x)$ qui passe par les points $(0.5, 1.1)$, $(0.9, 2.2)$ et $(1.2, 3.4)$. Vérifier que le polynôme $p_n(x)$ calculé passe bien par les points ci-dessus et interpoler une valeur en $x = 0.75$. Vous pouvez faire vos calculs à 4 décimales près.

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] \\
p_2(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] \\
p_3(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] \\
&+ (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\, f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_k] &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_k] - f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_j}
\end{aligned}$$

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0.5	1.1		
		2.75	
0.9	2.2		1.7857
		4	
1.2	3.4		

$$\boxed{P_2(x) = 1.1 + 2.75\,(x - 0.5) + 1.7857\,(x-0.5)(x-0.9)}$$

$$P_2(0.5) = 1.1 + 2.75\,\underbrace{\cancel{(0.5-0.5)}}_{0} + 1.7857\,\underbrace{\cancel{(0.5-0.5)}(0.5-0.9)}_{0}$$
$$= 1.1$$

$$P_2(0.9) = 1.1 + 2.75\,(0.9 - 0.5) + 0$$
$$= 1.1 + 2.75 \times (0.4) = 2.2$$

$$P_2(1.2) = 1.1 + 2.75\,(1.1 - 0.5) + 1.7857\,(1.1-0.5)(1.1-0.9)$$
$$= 1.1 + 2.75 \times 0.6 + 1.7857 \times 0.6 \times 0.2 = 3.4$$

$$P_2(0.75) = 1.1 + 2.75(0.75-0.5) + 1.7857(0.75-0.5)(0.75-0.9)$$

$$= 1.1 + 2.75 \times 0.25 + 1.7857 \times 0.25 \times (-0.15)$$

$$= 1.7205$$

$$\boxed{P_2(0.75) = 1.7205}$$