MAT 2784
Équations Différentielles et Méthodes Numériques
Examen de mi-session
Automne 2011

Durée: 80 minutes

Nom:______________________________

Étudiant #:____________________

Instructions:

- Ecrire votre nom et numéro d'étudiant sur cette page.
- Vérifier que votre copie de l'examen a bien 8 pages.
- L'examen comporte 6 questions pour un total de 37 points.
- Vous devez répondre à toutes les questions et donner des solutions complètes.
- Pour chaque question, écrivez la réponse immédiatement après la question dans l'espace qui est fourni. Vous pouvez utiliser le dos de la feuille, si nécessaire.
- **C'est un examen à livres fermés.**
- **Vous pouvez seulement utiliser une calculatrice de base, non programmable et sans capacité graphique.**

Question 1. (7 points) Résoudre le problème à valeur initiale suivant:

$$(4xy + y^2 - 9x^2y)\,dx + (4x^2 + 3xy - 6x^3)\,dy = 0, \qquad y(1) = 1\,.$$

$$M(x,y) = 4xy + y^2 - 9x^2y\,,\quad N(x,y) = 4x^2 + 3xy - 6x^3$$

$$M_y = 4x + 2y - 9x^2\,,\quad N_x = 8x + 3y - 18x^2$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{4x + 2y - 9x^2 - 8x - 3y + 18x^2}{4xy + y^2 - 9x^2y}$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{-4x - y + 9x^2}{y(4x + y - 9x^2)} = -\frac{1}{y} = g(y)$$

$$\mu(y) = e^{-\int -\frac{1}{y}dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(4xy + y^2 - 9x^2y) = 4xy^2 + y^3 - 9x^2y^2\,.$$

$$u(x,y) = 2x^2y^2 + y^3x - 3x^3y^2 + T(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow 4x^2y + 3xy^2 - 6x^3y + T'(y)$$

$$= 4x^2y + \cancel{3xy^2} - \cancel{6x^3y}$$

$$\Rightarrow T'(y) = 0 \Rightarrow T(y) = 0$$

$u(x,y) = 2x^2y^2 + xy^3 - 3x^3y^2 = c$ ~~[illegible]~~ est la solution générale. $y(1) = 1 \Rightarrow 2 + 1 - 3 = c \Rightarrow c = 0$

$u(x,y) = 2x^2y^2 + xy^3 - 3x^3y^2 = 0$ est la solution

Question 2. (9 points) Résoudre les problèmes à valeurs initiales suivants:
(a) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -10$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$, $\quad p(\lambda) = 0 \quad \Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 16 > 0$

$\lambda_1 = \frac{2+4}{2} = 3$, $\quad \lambda_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

$\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}} \quad y'(x) = -c_1 e^{-x} + 3c_2 e^{3x}$

$\begin{cases} y(0) = -2 \\ y'(0) = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -2 \\ -c_1 + 3c_2 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 - c_2 \\ c_2 = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -3 \end{cases}$ $\quad y(x) = e^{-x} - 3e^{3x}$ est l'unique solution du problème à valeurs initiales

(b) $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$, $\quad p(\lambda) = 0 \quad \Delta = 4 - 4\times 5 = -16 < 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm i4}{2} = -1 \pm 2i$

$\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} \cos(2x) + c_2 e^{-x} \sin(2x)}$

$y'(x) = -c_1 e^{-x} \cos(2x) - 2c_1 e^{-x} \sin(2x) - c_2 e^{-x} \sin(2x) + 2c_2 e^{-x} \cos(2x)$

$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

$\boxed{y(x) = 2e^{-x} \cos(2x) + e^{-x} \sin(2x)}$

(c) $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 5\,.$

$y = x^m \quad , \; y'(x) = m x^{m-1} \qquad y'' = m(m-1)\, x^{m-2}$

$P(m) = m(m-1) + 7m + 9 = m^2 + 6m + 9$

$\Delta = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0 \quad m_1 = m_2 = \frac{-6}{2} = -3$

$$\boxed{y(x) = C_1 x^m + C_2 (\ln(x))\, x^m}$$

$$\boxed{y(x) = C_1 x^{-3} + C_2 (\ln(x))\, x^{-3}}$$

$y'(x) = -3C_1 x^{-4} + C_2 \frac{1}{x} x^{-3} + C_2 \ln(x)(-3)\, x^{-4}$

$y''(x) = (-3C_1 + C_2)\, x^{-4} + (-3)\, C_2 \ln(x)\, x^{-4}$

$$\begin{cases} y'(1) = -3C_1 + C_2 = 5 \\ 0 = y(1) = C_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{C_2 = 5} \qquad \boxed{y(x) = 5 \ln(x)\, x^{-3}}$

est l'unique solution du problème à valeurs initiales.

Question 3. (6 points) Résoudre le problème à valeur initiale suivant:

$$y''' - 3y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 11, \qquad y''(0) = 11\,.$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8$$

$$p(1) = 0$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$$

$$= \lambda^3 + (a-1)\lambda^2 + (b-a)\lambda - b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 1 = -3 \\ b - a = -6 \\ -b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

$$p(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lambda = 1 \text{ ou } \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(-8) = 36 > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{2+6}{2} = 4, \quad \lambda_3 = \frac{2-6}{2} = -2$$

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{4x}$$

$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + 4c_3 e^{4x}$$

$$y''(x) = 4c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + 16 c_3 e^{4x}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ -2c_1 + c_2 + 4c_3 = 11 \\ 4c_1 + c_2 + 16c_3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 11 \\ 4 & 1 & 16 & 11 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & -3 & 12 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = -2e^{-2x} + 3e^{x} + e^{4x}}$$

est l'unique solution du problème à valeurs initiales.

Question 4 (7 points)
Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre le problème à valeur initiale:

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi/2), \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2\,.$$

Soit $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))(s)$

$$\mathcal{L}(y'' + 4y)(s) = \mathcal{L}(\delta(t - \tfrac{\pi}{2}))(s)$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 4Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$(s^2+4)Y(s) - 3s - 2 = e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$(s^2+4)Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s} + 3s + 2$$

$$Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{s^2+4} + 3\cdot\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\,u(t-\tfrac{\pi}{2})\sin 2(t-\tfrac{\pi}{2}) + 3\cos(2t) + \sin(2t)}$$

Question 5. (4 points) Utiliser la méthode de Newton pour trouver la première solution de l'équation $e^{-x} = \sin x$ à 6 décimales près. Commencer avec $x_0 = 0.75$.

$$e^{-x} = \sin(x) \Leftrightarrow e^{-x} - \sin(x) = 0$$

$$f(x) = e^{-x} - \sin(x) \quad , \quad f'(x) = -e^{-x} - \cos(x)$$

Méthode de Newton $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

$$x_0 = 0.75$$

$$x_1 = 0.75 - \frac{f(0.75)}{f'(0.75)} = 0.57619387486$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.5884725217766$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.5885327$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.58853274$$

$$\boxed{r \simeq 0.588532}$$

Question 6. (4 points) Utiliser l'interpolation itérée de Newton pour trouver le polynôme d'interpolation $p_n(x)$ qui passe par les points $(0.5, 1.2)$, $(0.9, 2.1)$ et $(1.2, 3.1)$. Vérifier que le polynôme $p_n(x)$ calculé passe bien par les points ci-dessus et interpoler une valeur en $x = 0.75$. Vous pouvez faire vos calculs à 4 décimales près.

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] \\
p_2(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] \\
p_3(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] \\
&+ (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\, f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_k] &= \frac{f[x_{j+1}, \ldots, x_k] - f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_j}
\end{aligned}$$

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0.5	1.2		
		2.25	
0.9	2.1		1.5476
		3.3333	
1.2	3.1		

$$\boxed{P_2(x) = 1.2 + 2.25(x-0.5) + 1.5476(x-0.5)(x-0.9)}$$

$$P_2(0.5) = 1.2 + 2.25(\underbrace{0.5-0.5}_{0}) + 1.5476(\underbrace{0.5-0.5}_{0})(0.5-0.9)$$
$$= 1.2$$

$$P_2(0.9) = 1.2 + 2.25(0.9-0.5) + 1.5476(0.9-0.5)(\underbrace{0.9-0.9}_{0})$$
$$= 1.2 + 2.25 * 0.4 = 2.1$$

$$P_2(1.2) = 1.2 + 2.25 \times 0.7 + 1.5476(0.7)(0.3)$$
$$= 3.1$$

$$P_2(0.75) = 1.2 + 2.25(0.75-0.5) + 1.5476(0.75-0.5)(0.75-0.9)$$

$$= 1.2 + 2.25(0.25) + 1.5476 \times 0.25 \times (-0.15)$$

$$\boxed{P_2(0.75) = 1.7045}$$

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= f(x_0) + (x-x_0)\, f[x_0,x_1] \\
p_2(x) &= f(x_0) + (x-x_0)\, f[x_0,x_1] + (x-x_0)\,(x-x_1)\, f[x_0,x_1,x_2] \\
p_3(x) &= f(x_0) + (x-x_0)\, f[x_0,x_1] + (x-x_0)\,(x-x_1)\, f[x_0,x_1,x_2] \\
&\quad +(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\, f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
|\, f(x) - p_n(x)\,| &= \left|\, (x-x_0)\,(x-x_1)\,\cdots\,(x-x_n)\, \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \,\right| \\
&\quad \text{où} \;\; x_0 \le \xi(x) \le x_n \\
f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_k] &= \frac{f[x_{j+1},\dots,x_k] - f[x_j, x_{j+1},\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\simeq h[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)], \\
&\qquad |\epsilon| \le \frac{1}{4}\, M\,(b-a)\,h\,, \qquad M = \max_{a\le x\le b} |f'(x)|, \qquad x_j^* = (x_{j-1}+x_j)/2\,. \\
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\simeq h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b))\right], \\
&\qquad |\epsilon| \le \frac{1}{12}\, M\,(b-a)\,h^2\,, \qquad M = \max_{a\le x\le b} |f''(x)| \\
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \frac{h}{3}[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(b)] \\
&\qquad |\epsilon| \le \frac{1}{180}\, M\,(b-a)\,h^4\,, \qquad M = \max_{a\le x\le b}\; |f^{(4)}(x)|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}^* &= y_n + h\, f(x_n, y_n) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}h\, \Big(f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)\Big) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}\,(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) \\
&\quad k_1 = h\, f(x_n, y_n) \\
&\quad k_2 = h\, f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\
&\quad k_3 = h\, f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}\,k_2) \\
&\quad k_4 = h\, f(x_n + h, y_n + k_3)
\end{aligned}
$$