Université d'Ottawa, Départment de mathématiques et statistiques

MAT 2722: Calcul III pour ingenieurs
Professeur: Abdellah Sebbar

Examen de mi-session 2
10 novembre 2011

Solutions

Nom de famille ______________________ Prénom ______________________

Numero d'étudiant ______________________

Instructions:

(1) Mettez votre numero d'étudiant en haut de chaque page dans l'espace fourni.
(2) Chaque question vaut 4 points.
(3) Seules les calculatrices non-programmables et non-graphiques sont permises.

Question 1: Calculer le volume du solide E borné par les plans $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$ et le paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$.

Solution:

$$\begin{aligned}
V &= \int\int_D z dx dy \quad \text{avec} \quad D = [0,1] \times [0,2] \\
&= \int_0^1 \int_0^2 (9 - x^2 - y^2) dy dx = \int_0^1 [9y - x^2 y - \frac{1}{3} y^3]_0^2 dx \\
&= \int_0^1 (18 - 2x^2 - \frac{8}{3}) dx = \cdots = \frac{44}{3}.
\end{aligned}$$

Question 2: Convertir l'intégrale suivante en coordonnées polaires. **NE PAS EVALUER L'INTEGRALE**.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} (2x+y)dxdy.$$

Indication. Faire un dessin et exprimer la région en coordonnées polaires.

Solution:

On pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. La region en question est le huitième du disque de rayon 1 situé dans le 1er quandrant entre l'axe Ox et la droite $y = x$. Ainsi on a $0 \leq \theta \leq \pi/4$ et $0 \leq r \leq 1$. On a

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} (2x+y)dxdy = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 (2r\cos\theta + r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2(2\cos\theta + \sin\theta)drd\theta$$

Question 3: Cherchez la linéarisation de $y\sqrt{x}$ au point $(9,1)$.

Solution: On pose $f(x,y) = y\sqrt{x}$. On a $f'_x(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x}}$ et $f'_y(x,y) = \sqrt{x}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} L(x,y) =& f(9,1) + f'_x(9,1)(x-9) + f'_y(9,1)(y-1) \\ =& 3 + \frac{1}{6}(x-9) + 3(y-1) \\ =& -\frac{3}{2} + \frac{x}{6} + 3y. \end{aligned}$$

Question 4: Déterminer les valeurs maximales et minimales locales ainsi que les points-selles de la fonction

$$f(x, y) = 2x^4 + 2y^4 - 8xy + 25$$

Solution: On a $f'_x = 8x^3 - 8y = 8(x^3 - y)$ et $f'_y = 8y^3 - 8x = 8(y^3 - x)$. Si $f'_x = 0$ et $f'_y = 0$, on a $x^3 - y = 0$ et $y^3 - x = 0$. Donc $0 = x^9 - x = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$. Il en suit que $x = 0,\ x = -1,\ x = 1$.

Les points critiques sont $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

On a $f"_{xx} = 24x^2$, $f"_{yy} = 24y^2$ et $f"_{xy} = -8$.

Donc $D(x, y) = f"_{xx} f"_{yy} - f"^2_{xy} = (24)^2 x^2 y^2 - 64$.

$D(1, 1) = D(-1, -1) = (24)^2 - 64 > 0$ et $f"_{xx}(\pm 1, \pm 1) = 24 > 0$. On a donc un min local aux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ et ce max est $F(1, 1) = f(-1, -1) = 21$

$D(0, 0) = -64 < 0$, on a un point-selle en $(0, 0)$.

Question 5: Trouver le maximum absolu et le minimum absolu de la fonction $f(x,y)=xy$ sur la region

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 4\}\,.$$

Solution:
Puisque $f'_x=y$ et $f'_y=x$, on a un seul point critique: $(0,0)$ et $f(0,0)=0$

On analyse f sur la frontière qui est le cercle $x^2+y^2=4$. On peut ecrire $y=\sqrt{4-x^2}$ pour la moitié supérieure du cercle et $f(x,y)=x\sqrt{4-x^2}=g(x)$ et on a $y=-\sqrt{4-x^2}$ pour la moitié inférieure du cercle et $f(x,y)=-x\sqrt{4-x^2}=h(x)$ avec $-2\leq x\leq 2$.
$g'(x)=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0$ pour $x=\pm\sqrt{2}$ et on a $g(\pm\sqrt{2})=\pm 2$.

Même chose pour la moitié inférieur du cercle.

On en déduit que le max sur le cercle est 2 et le min sur le cercle est -2.

En comparant avec le point critique, on voit que le max absolu de f est 2 et le min absolu de f est -2.

2eme méthode: On peut aussi utiliser le multiplicateur de Lagrange pour trouver le max et le min sur le cercle.

3eme méthode: On pose $x=2\cos\theta$, $y=2\sin\theta$. Donc $f(x,y)=4\cos\theta\sin\theta=2\sin 2\theta$. Puisque $-1\leq\sin 2\theta\leq 1$, le max de f est 2 et le min est -2 sur le cercle.

Question 6: Calculez par la méthode de Lagrange les valeurs extrêmes de la fonction $f(x, y) = x^2y^2$ avec la contrainte $x^2 + y^2 = 8$.

Solution: Soit $g(x, y) = x^2 + y^2$ On écrit: $f'_x = \lambda g'_x$ et $f'_y = \lambda g'_y$. C'est à dire:

$2xy^2 = 2\lambda x$ et $2x^2y = 2\lambda y$.

De la 1ere équation, on a soit $x = 0$, soit $\lambda = y^2$.

Dans le 1er cas, on aussi $y^2 = 8$ et donc $y = \pm 2\sqrt{2}$, et dans le 2eme cas on tire de la 2eme équation que $2x^2y = 2y^3$, et donc soit $y = 0$ soit $x^2 = y^2$. Si $y = 0$ alors $x = \pm 2\sqrt{2}$ et si $x^2 = y^2$, on a $2x^2 = 8$ et donc $x = \pm 2$ et $y = \pm 2$.

$f(\pm 2, \pm 2) = 16$ qui est le maximum et $f(0, \pm 2\sqrt{2}) = f(\pm 2\sqrt{2}, 0) = 0$ qui est le minimum.

Question 7: Exprimez l'intégrale suivante en coordonnées sphériques. **NE PAS EVALUER L'INTEGRALE**.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2z+y^2z+z^3)dzdxdy\,.$$

Solution:

On passe aux coordonnées sphériques: $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$, $z = \rho\cos\phi$.

Puisque $-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$, on a $z^2 \leq 1-x^2-y^2$, c'est à dire $\rho^2 = x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Le solide est donc la boule de rayon 1.

Ainsi: $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq \phi \leq \pi$.

$x^2z+y^2z+z^3 = z(x^2+y^2+z^2) = \rho\cos\phi\rho^2 = \rho^3\cos\phi$.

$dxdydz = \rho^2\sin\phi\; d\rho\; d\phi\; d\theta$

D'où:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2z+y^2z+z^3)dzdxdy\,. = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^5\cos\phi\sin\phi\; d\rho\; d\phi\; d\theta.$$

Cette page est pour votre brouillon