Université d'Ottawa, Départment de mathématiques et statistiques

MAT 2722: Calcul III pour ingenieurs
Professeur: Abdellah Sebbar

Examen de mi-session – 6 octobre 2011

Nom de famille ______________________ Prénom ______________________

Numero d'étudiant ______________________

Instructions:

(1) L'examen dure 80 minutes.
(2) Mettez votre numero d'étudiant en haut de chaque page dans l'espace fourni.
(3) Seules les calculatrices non-programmables et non-graphiques sont permises.

Question 1: a) Trouver l'équation cartésienne de la sphère de centre $(2, 6, -4)$ et de rayon 5.

b) En utilisant les coordonnées sphériques, donnez une équation vectorielle de cette sphère.

c) Quelle est la forme de l'intersection de cette sphère avec le plan $y = 0$.

Solution: $(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 25$.

b) L'équation vectorielle de la sphère est donnée par:

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (5\sin\phi\cos\theta + 2)\vec{i} + (5\sin\phi\sin\theta + 6)\vec{j} + (5\cos\phi - 4)\vec{k}$$

ou bien

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (5\sin\phi\cos\theta + 2, 5\sin\phi\sin\theta + 6, 5\cos\phi - 4).$$

c) Si on pose $y = 0$ dans l'équation cartésienne, on trouve

$$(x-2)^2 + (z+4)^2 = -11$$

ce qui est impossible. Donc pas d'intersection.

Question 2: Soit

$$f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}.$$

Trouver toutes les partielles premières f'_x, f'_y de f ainsi que ses secondes dérivées partielles $f_{xy}, f_{xx}, f_{yx}, f_{yy}$. **Solution:**

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{-y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} \\
f_y &= \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} \\
f_{xy} &= \frac{-1}{x^2} e^{\frac{y}{x}} + \frac{1}{x} \frac{-y}{x^2} e^{\frac{y}{x}} \\
f_{xx} &= \frac{2y}{x^3} e^{\frac{y}{x}} + \frac{y^2}{x^4} e^{\frac{y}{x}} \\
f_{yx} &= f_{xy} \\
f_{yy} &= \frac{1}{x^2} e^{\frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

Question 3: a) Trouver l'équation paramétrique de la droite qui passe par le point $(5, 1, 0)$ et qui est perpendiculaire au plan $2x - y + z = 1$.
b) En quels points cette droite rencontre les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$?

Solution: a) Le vecteur $\vec{v} = \langle 2, -1, 1\rangle$ est normal au plan et parallèle à la droite. L'équation paramétrique de la droite est donc:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

b) Pour le plan $z = 0$: $z = t = 0$. Le point d'intersection est

$$(5, 1, 0)$$

Pour le plan $y = 0$: $y = 1 - t = 0 \to t = 1$. Le point d'intersection est

$$(7, 0, 1)$$

Pour le plan $x = 0$: $x = 5 + 2t = 0 \to t = -5/2$. Le point d'intersection est

$$(0, 7/2, -5/2)$$

Question 4: On considère la surface

$$x^2 = z^2 + \frac{y^2}{4}.$$

a) Faites un dessin de cette surface.

b) Trouver les traces de cette surfaces sur les plans $x = k$, $y = k$ et $z = k$ (distinguer les cas $k = 0$ et $k \neq 0$).

Solution: a) C'est un cône elliptique d'axe Ox.

b) Si $z = k \neq 0$, les traces sont des hyperboles.
Si $z = 0$, les traces sont deux droites.
Si $y = k \neq 0$, les traces sont des hyperboles.
Si $y = 0$, es traces sont deux droites.
Si $x = k \neq 0$, les traces sont des ellipses.
Pour $x = 0$ la trace est un point.

Question 5: Trouver la courbure de $\overrightarrow{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \sin t, t\rangle$ quand $t = \pi$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= \langle e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, 1\rangle \\
\vec{r}\,''(t) &= \langle -2e^t \sin t, 2e^t \cos t, 0\rangle \\
\vec{r}\,'(\pi) &= \langle -e^\pi, -e^\pi, 1\rangle \\
\vec{r}\,''(\pi) &= \langle 0, -2e^\pi, 0\rangle \\
\vec{r}\,'(\pi/2) \times \vec{r}\,''(\pi/2) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -e^\pi & -e^\pi & 1 \\ 0 & -2e^\pi & 0 \end{vmatrix} = 2e^\pi)\vec{i} + 2e^{2\pi}\vec{k} \\
\kappa(\pi/2) &= \frac{|\vec{r}\,'(\pi) \times \vec{r}\,''(\pi)|}{|\vec{r}\,'(\pi)|^3} = \frac{\sqrt{4e^{2\pi} + 4e^{4\pi}}}{(\sqrt{2e^{2\pi} + 1})^3}
\end{aligned}$$

Question 6: Montrer que si $||\overrightarrow{r}(t)||$ est constant, alors $\overrightarrow{r}(t)$ et $\overrightarrow{r}'(t)$ sont orthogonaux.

Solution:

Si $||\overrightarrow{r}(t)|| = c$ alors $||\overrightarrow{r}(t)||^2 = \overrightarrow{r}(t) \cdot \overrightarrow{r}(t) = c^2$. On dérive:

$$2\overrightarrow{r}'(t) \cdot \overrightarrow{r}(t) = 0.$$

Ainsi $\overrightarrow{r}(t)$ et $\overrightarrow{r}'(t)$ sont orthogonaux.

Question 7: Est ce que la limite de

$$f(x, y) = \frac{x^6 y}{x^9 + y^3}$$

existe en $(0, 0)$?

Solution: Si on prend $x = 0$ ou $y = 0$ et si $(x, y) \to (0, 0)$, on a $f(x, y) \to 0$. Mais si on prend $y = x^3$ alors

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{x^9}{2x^9} = \frac{1}{2}$$

Ainsi la limite n'existe pas.

Cette page est pour votre brouillon