

Université d'Ottawa, Département de mathématiques et statistiques

MAT 2722: Calcul III pour ingénieurs
Professeur: Abdellah Sebbar

Examen de mi-session – 6 octobre 2011

Nom de famille _____ Prénom _____

Numero d'étudiant _____

Instructions:

- (1) L'examen dure 80 minutes.
- (2) Mettez votre numero d'étudiant en haut de chaque page dans l'espace fourni.
- (3) Seules les calculatrices non-programmables et non-graphiques sont permises.

Question 1: a) Trouver l'équation cartésienne de la sphère de centre $(2, 6, -4)$ et de rayon 5.

b) En utilisant les coordonnées sphériques, donnez une équation vectorielle de cette sphère.

c) Quelle est la forme de l'intersection de cette sphère avec le plan $y = 0$.

Solution: $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z + 4)^2 = 25$.

b) L'équation vectorielle de la sphère est donnée par:

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (5 \sin \phi \cos \theta + 2)\vec{i} + (5 \sin \phi \sin \theta + 6)\vec{j} + (5 \cos \phi - 4)\vec{k}$$

ou bien

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (5 \sin \phi \cos \theta + 2, 5 \sin \phi \sin \theta + 6, 5 \cos \phi - 4).$$

c) Si on pose $y = 0$ dans l'équation cartésienne, on trouve

$$(x - 2)^2 + (z + 4)^2 = -11$$

ce qui est impossible. Donc pas d'intersection.

Question 2: Soit

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}.$$

Trouver toutes les partielles premières f'_x , f'_y de f ainsi que ses secondes dérivées partielles f_{xy} , f_{xx} , f_{yx} , f_{yy} . **Solution:**

$$f_x = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}$$

$$f_y = \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$$

$$f_{xy} = \frac{-1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$$

$$f_{xx} = \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$$

$$f_{yx} = f_{xy}$$

$$f_{yy} = \frac{2x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} + \frac{x^2}{y^4} e^{\frac{x}{y}}$$

Question 3: a) Trouver l'équation paramétrique de la droite qui passe par le point $(5, 1, 0)$ et qui est perpendiculaire au plan $2x - y + z = 1$.

b) En quels points cette droite rencontre les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$?

Solution: a) Le vecteur $\vec{v} = \langle 2, -1, 1 \rangle$ est normal au plan et parallèle à la droite. L'équation paramétrique de la droite est donc:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

b) Pour le plan $z = 0$: $z = t = 0$. Le point d'intersection est

$$(5, 1, 0)$$

Pour le plan $y = 0$: $y = 1 - t = 0 \rightarrow t = 1$. Le point d'intersection est

$$(7, 0, 1)$$

Pour le plan $x = 0$: $x = 5 + 2t = 0 \rightarrow t = -5/2$. Le point d'intersection est

$$(0, 7/2, -5/2)$$

Question 4: On considère la surface

$$z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}.$$

- a) Faites un dessin de cette surface.
- b) Trouver les traces de cette surfaces sur les plans $x = k$, $y = k$ et $z = k$ (distinguer les cas $k = 0$ et $k \neq 0$).

Solution: a) C'est un cône elliptique d'axe Oz .

- b) Si $x = k \neq 0$, les traces sont des hyperboles.
Si $x = 0$, les traces sont deux droites.
- Si $y = k \neq 0$, les traces sont des hyperboles.
Si $y = 0$, es traces sont deux droites.
- Si $z = k \neq 0$, les traces sont des ellipses.
Pour $z = 0$ la trace est un point.

Question 5: Trouver la courbure de $\vec{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \sin t, t \rangle$ quand $t = \pi/2$.

Solution:

$$\vec{r}'(t) = \langle e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, 1 \rangle$$

$$\vec{r}''(t) = \langle -2e^t \sin t, 2e^t \cos t, 0 \rangle$$

$$\vec{r}'(\pi/2) = \langle -e^{\pi/2}, e^{\pi/2}, 1 \rangle$$

$$\vec{r}''(\pi/2) = \langle -2e^{\pi/2}, 0, 0 \rangle$$

$$\vec{r}'(\pi/2) \times \vec{r}''(\pi/2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -e^{\pi/2} & e^{\pi/2} & 1 \\ -2e^{\pi/2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(2e^{\pi/2})\vec{j} + 2e^{\pi}\vec{k}$$

$$\kappa(\pi/2) = \frac{|\vec{r}'(\pi/2) \times \vec{r}''(\pi/2)|}{|\vec{r}'(\pi/2)|^3} = \frac{\sqrt{4e^{\pi} + 4e^{2\pi}}}{(\sqrt{2e^{\pi} + 1})^3}$$

Question 6: Montrer que si $\|\vec{r}(t)\|$ est constant, alors $\vec{r}(t)$ et $\vec{r}'(t)$ sont orthogonaux.

Solution:

Si $\|\vec{r}(t)\| = c$ alors $\|\vec{r}(t)\|^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = c^2$. On dérive:

$$2\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0.$$

Ainsi $\vec{r}(t)$ et $\vec{r}'(t)$ sont orthogonaux.

Question 7: Est ce que la limite de

$$f(x, y) = \frac{xy^6}{x^3 + y^9}$$

existe en $(0, 0)$?

Solution: Si on prend $x = 0$ ou $y = 0$ et si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, on a $f(x, y) \rightarrow 0$. Mais si on prend $x = y^3$ alors

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^9}{2y^9} = \frac{1}{2}$$

Ainsi la limite n'existe pas.

Numero d'étudiant: _____ MAT 2722 Examen de mi-session, 6 octobre 2011

Cette page est pour votre brouillon