MAT 1722 A. Hiver 2011. Mercredi 16 mars. 8h30–9h50 Prof. D. Roy

Examen de mi-session 2

Version B

Max = 20 pts

NOM de famille: SOLUTIONS

Prénom: ______________________

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (modèles TI30xx) sont autorisées. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- Chaque problème requiert une solution complète et claire. Une partie importante des points est allouée au développement.
- L'examen comporte cinq questions qui valent chacune de 4 points, pour un total de 20 points.

1. Un pot de jus est sorti du réfrigérateur à 10h, et placé sur le comptoir de cuisine. La température du réfrigérateur est de 5 °C et celle de la cuisine est de 21 °C. Une heure plus tard, la température du pot de jus est de 12 °C. Soit $T(t)$ la température du pot t heures après 10h.

(i) En supposant que cette température suive la loi du réchauffement de Newton, quelle équation différentielle satisfait $T(t)$?

(ii) Résoudre cette équation différentielle et donner une formule explicite pour $T(t)$.

(iii) Quelle est la température du pot à midi?

(i) $\frac{dT}{dt} = k(T-21)$ où k est une constante, $T(0)=5$, $T(1)=12$.

(ii) $\frac{dT}{T-21} = k\,dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T-21} = \int k\,dt \Rightarrow \ln|T-21| = kt + C$

$\Rightarrow |T-21| = e^{kt+C} \Rightarrow T-21 = Ae^{kt}$ où $A = \pm e^{C}$

$\Rightarrow \boxed{T = 21 + Ae^{kt}}$ où A est une constante

$T(0)=5 \Rightarrow 5 = 21 + A \Rightarrow A = -16 \Rightarrow \boxed{T = 21 - 16e^{kt}}$

$T(1) = 12 \Rightarrow 12 = 21 - 16e^{k} \Rightarrow 16e^{k} = 9 \Rightarrow e^{k} = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow k = \ln(9/16) \simeq -0.5754$

$\Rightarrow T = 21 - 16e^{\ln(9/16)t}$

Donc, $T \cong \boxed{21 - 16e^{-0.5754\,t}}$ ou encore $\boxed{T = 21 - 16\left(\frac{9}{16}\right)^{t}}$

(iii) A midi, on a $t=2$, donc la température du pot est

$T(2) = 21 - 16\left(\frac{9}{16}\right)^2 = 21 - \frac{81}{16} \simeq \boxed{15.9\,°C.}$

2. (i) Déterminer $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5+3n}{3n^5-2}$ si cette limite existe.

$$\frac{n^5+3n}{3n^5-2} = \frac{1+\frac{3}{n^4}}{3-\frac{2}{n^5}} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{3}} \text{ si } n \to \infty.$$

question omise

~~(ii)~~ Déterminer $\lim_{n\to\infty} \frac{n^6}{3^n}$ si cette limite existe.

On pose $a_n = \frac{n^6}{3^n}$. Alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^6}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^6}$

$= \frac{(n+1)^6}{n^6} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^6 \cdot \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$ si $n \to \infty$. Comme $\frac{1}{3} < 1$,

cela signifie que $\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{0}$.

(ii) ~~(iii)~~ Déterminer si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{2n}}{7^{n-2}}$ est convergente et si oui, calculer sa somme.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{2n}}{7^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 9^n}{7^{-2} \cdot 7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 98 \cdot \left(\frac{9}{7}\right)^n$$

est une série géométrique de raison $\frac{9}{7} > 1$. Donc elle est $\boxed{\text{divergente.}}$

(iii) ~~(iv)~~ Utiliser un test de comparaison pour déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos(n+1)}{n^3+2n}$ est convergente ou non. Prendre soin de bien justifier votre réponse.

Comme $-1 \leq \cos(n+1) \leq 1$ pour tout $n \geq 1$, on a

$2 \leq 3 + \cos(n+1) \leq 4$ et par suite

$$0 \leq \frac{3+\cos(n+1)}{n^3+2n} \leq \frac{4}{n^3+2n} \leq \frac{4}{n^3} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

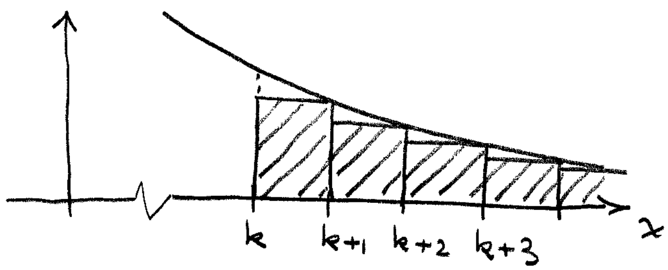
De plus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$ (série de type $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ avec $p > 1$). Donc la série donnée est convergente en vertu du test de comparaison.

3. (i) Le test de l'intégrale nous apprend que, si une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a pour terme général $a_n = f(n)$ où $f(x)$ est une fonction décroissante de x à valeurs positives pour $x \geq k$, alors l'erreur d'approximation de sa somme s par la somme s_k de ses k premiers termes satisfait

$$0 \leq s - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \leq \int_k^{\infty} f(x)dx$$

(on suppose que l'intégrale est convergente). Justifier cette estimation par un dessin et un mot d'explication.

L'erreur $s - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots$ représente l'aire totale de la région hachurée sur le dessin ci-dessous



Cette aire est ≥ 0 et au plus égale à l'aire sous le graphe de $f(x)$ pour $x \geq k$, c'est-à-dire $\int_k^{\infty} f(x)dx$.

(ii) En utilisant ce critère, combien de termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ faut-il additionner pour que l'erreur d'approximation soit d'au plus 0.001?

Ici, $\frac{1}{n^2} = f(n)$ où $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est décroissante à valeurs positives pour $x \geq 1$. Donc, pour $k \geq 1$, l'erreur d'approximation par $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$ de la somme de la série est

$$s - s_k \leq \int_k^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \int_k^t \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right|_k^t = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{k}.$$

On a $\frac{1}{k} \leq 0.001 \iff k \geq 1000$. Donc, il faut additionner $\boxed{1000}$ termes.

4. Déterminer le rayon et l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n(n+5)}$.

Le terme général de cette série est $a_n = \frac{(x+3)^n}{2^n(n+5)}$. On trouve

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x+3|^{n+1}}{2^{n+1}(n+6)} \cdot \frac{2^n(n+5)}{|x+3|^n} = \frac{|x+3|}{2} \cdot \frac{n+5}{n+6}$$

$$= \frac{|x+3|}{2} \cdot \frac{1+5/n}{1+6/n} \longrightarrow \frac{|x+3|}{2} \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Donc, en vertu du test du quotient,

- la série converge si $\frac{|x+3|}{2} < 1 \iff |x+3| < 2 \iff -2 < x+3 < 2$
$\iff -5 < x < -1$

- elle diverge si $\frac{|x+3|}{2} > 1 \iff |x+3| > 2 \iff x < -5$ ou $x > -1$

Son rayon de convergence est $\boxed{R = 2}$.

- Pour $x = -5$, la série devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n(n+5)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$$

série alternée de terme général $(-1)^n b_n$ avec $b_n = \frac{1}{n+5} \downarrow 0$.

Donc, pour $x = -5$, la série converge en vertu du test sur les séries alternées.

- Pour $x = -1$, la série devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n+5)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5} = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{(série harmonique)}.$$

Donc, pour $x = -1$, la série diverge.

$\Rightarrow$ L'intervalle de convergence de la série est $[-5, -1)$.

5. (i) A l'aide de la série de MacLaurin de $\dfrac{1}{1-x}$, déterminer celle de $\dfrac{1}{1+x^2}$ et donner son rayon de convergence.

(ii) En déduire la série de MacLaurin de $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

(iii) Exprimer $\displaystyle\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ sous forme de série et estimer sa valeur avec une erreur d'au plus 10^{-6} (en valeur absolue). Combien de termes doit-on additionner? (Justifier votre réponse.)

(i) $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$ si $|x|<1$

et cette série diverge si $|x| \geq 1$ (série géométrique de raison x).

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

si $|-x^2| < 1$ c'est-à-dire si $|x|<1$, et cette série diverge si $|-x^2| \geq 1$ c'est-à-dire si $|x| \geq 1$.

Le rayon de convergence de cette série est $R = 1$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

$= C + x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dots$ si $|x|<1$.

(iii) $\displaystyle\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right|_0^{0.1}$

$= 0.1 - \dfrac{0.1^3}{3} + \dfrac{0.1^5}{5} - \dfrac{0.1^7}{7} + \dots$

Série alternée de terme général $(-1)^n b_n$ avec $b_n = \dfrac{0.1^{2n+1}}{2n+1} \downarrow 0$.

En vertu du test des séries alternées, la série converge. De plus, comme $\dfrac{0.1^5}{5} > 10^{-6}$ et $\dfrac{0.1^7}{7} < 10^{-6}$, on a

$\displaystyle\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^2}\,dx \cong 0.1 - \frac{10^{-3}}{3} + \frac{10^{-5}}{5}$ avec une erreur $< \dfrac{10^{-7}}{7} < 10^{-6}$

$\cong 0.0996668$ Il faut prendre 3 termes.