MAT 1722 A. Hiver 2011. Mercredi 16 mars 8h30–9h50 Prof. D. Roy

Examen de mi-session 2.

Version A

Max = 20 pts

SOLUTIONS

NOM de famille: ______________________

Prénom: ______________________

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (modèles TI30xx) sont autorisées. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- Chaque problème requiert une solution complète et claire. Une partie importante des points est allouée au développement.
- L'examen comporte cinq questions qui valent chacune de 4 points, pour un total de 20 points.

1. Un pot de jus est sorti du réfrigérateur à 9h, et placé sur le comptoir de cuisine. La température du réfrigérateur est de 4 °C et celle de la cuisine est de 22 °C. Une heure plus tard, la température du pot de jus est de 12 °C. Soit $T(t)$ la température du pot t heures après 9h.

(i) En supposant que cette température suive la loi du réchauffement de Newton, quelle équation différentielle satisfait $T(t)$?

(ii) Résoudre cette équation différentielle et donner une formule explicite pour $T(t)$.

(iii) Quelle est la température du pot à midi?

(i) $\frac{dT}{dt} = k(T-22)$ où k est une constante, $T(0)=4$, $T(1)=12$

(ii) $\int \frac{dT}{T-22} = \int k\,dt \Rightarrow \ln|T-22| = kt + C$

$\Rightarrow |T-22| = e^{kt+C} \Rightarrow T-22 = Ae^{kt}$ où $A = \pm e^{C}$

$\Rightarrow \boxed{T = 22 + Ae^{kt}}$

- $T(0)=4 \Rightarrow 4 = 22 + A \Rightarrow A = -18 \Rightarrow \boxed{T = 22 - 18e^{kt}}$
- $T(1) = 12 \Rightarrow 12 = 22 - 18e^{k} \Rightarrow e^{k} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow k = \ln(5/9) \cong -0.5879$

Donc $T(t) = 22 - 18e^{\ln(5/9)t} = \boxed{22 - 18\left(\frac{5}{9}\right)^{t}}$

$\cong \boxed{22 - 18e^{-0.5879t}}$

(iii) A midi, on a $t=3$, donc la température du pot est

$$T(3) = 22 - 18\left(\frac{5}{9}\right)^{3} = 22 - \frac{250}{81} \cong \boxed{18.9\,°C}$$

2. (i) Déterminer $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^4+3n}{5n^4-3}$ si cette limite existe.

$$\frac{2n^4+3n}{5n^4-3} = \frac{2+\frac{3}{n^3}}{5-\frac{3}{n^4}} \longrightarrow \boxed{\frac{2}{5}} \quad \text{si } n\to\infty.$$

question omise

~~(ii)~~ Déterminer $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^5}{2^n}$ si cette limite existe.

On pose $f(x) = \dfrac{x^5}{2^x} = \dfrac{x^5}{e^{(\ln 2)x}}$. En appliquant 5 fois la règle de l'Hospital, on trouve

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^{(\ln 2)x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{(\ln 2)e^{(\ln 2)x}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{5!}{(\ln 2)^5 e^{(\ln 2)x}} = 0.$$

Donc, $\lim_{n\to\infty} n^5/2^n = 0$.

(ii) ~~(iii)~~ Déterminer si $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5\cdot 3^{2n}}{4^{n-2}}$ est convergente et si oui, calculer sa somme.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 3^{2n}}{4^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 9^n}{4^{-2}4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 80\left(\frac{9}{4}\right)^n$$

est une série géométrique de raison $\frac{9}{4} > 1$. Donc, elle est $\boxed{\text{divergente.}}$

(iii) ~~(iv)~~ Utiliser un test de comparaison pour déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5+\sin(n+1)}{n^2+2n}$ est convergente ou non. Prendre soin de bien justifier votre réponse.

Comme $-1 \leqslant \sin(n+1) \leqslant 1$ pour tout $n \geq 1$, on a $4 \leqslant 5+\sin(n+1) \leqslant 6$ et par suite

$$0 \leqslant \frac{5+\sin(n+1)}{n^2+5n} \leqslant \frac{6}{n^2+5n} \leqslant \frac{6}{n^2} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

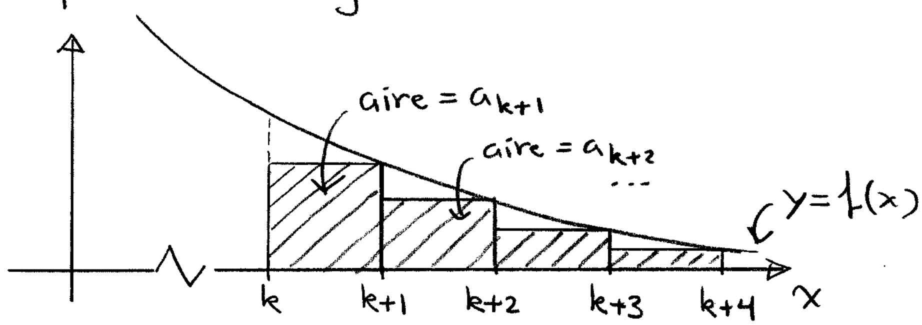
De plus, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2} = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ (série de type $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ avec $p > 1$). Donc la série donnée est convergente en vertu du test de comparaison.

3. (i) Le test de l'intégrale nous apprend que, si une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a pour terme général $a_n = f(n)$ où $f(x)$ est une fonction décroissante de x à valeurs positives pour $x \geq k$, alors l'erreur d'approximation de sa somme s par la somme s_k de ses k premiers termes satisfait

$$0 \leq s - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \leq \int_k^{\infty} f(x)dx$$

(on suppose que l'intégrale est convergente). Justifier cette estimation par un dessin et un mot d'explication.

L'erreur $s - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$ représente l'aire totale couverte par les rectangles dans le dessin ci-dessous



Cette aire est ≥ 0 et au plus égale égale à l'aire sous le graphe de $f(x)$ pour $x \geq k$, c'est-à-dire $\int_k^{\infty} f(x)dx$.

(ii) En utilisant ce critère, combien de termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ faut-il additionner pour que l'erreur d'approximation soit d'au plus 0.005?

Ici, $\frac{1}{n^3} = f(n)$ où $f(x) = \frac{1}{x^3}$ est une fonction décroissante de x à valeurs positives pour $x \geq 1$. Donc, pour $k \geq 1$, l'erreur d'approximation de la somme $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ par $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3}$ satisfait

$$0 \leq s - s_k \leq \int_k^{\infty} \frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to\infty} \int_k^t \frac{1}{x^3}dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_k^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2t^2}\right) = \frac{1}{2k^2}.$$

On a $\frac{1}{2k^2} \leq 0.005 \iff k^2 \geq 100 \iff k=10$. Donc il suffit d'additionner $\boxed{\text{10 termes.}}$

4. Déterminer le rayon et l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{4^n(n+3)}$.

Le terme général est $a_n = \frac{(x+2)^n}{4^n(n+3)}$. On trouve

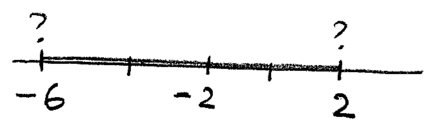
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x+2|^{n+1}}{4^{n+1}(n+4)} \cdot \frac{4^n(n+3)}{|x+2|^n}$$

$$= \frac{|x+2|}{4} \cdot \frac{n+3}{n+4} = \frac{|x+2|}{4} \cdot \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} \longrightarrow \frac{|x+2|}{4} \quad \text{si } n \to \infty.$$

En vertu du test du quotient, la série est

- convergente si $\frac{|x+2|}{4} < 1 \iff |x+2| < 4 \iff x \in (-6,2)$
- divergente si $\frac{|x+2|}{4} > 1 \iff |x+2| > 4 \iff x \notin [-6,2]$

Le rayon de convergence de la série est $\boxed{R=4}$.



- Pour $x=-6$, la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{4^n(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3} \quad \text{qui est convergente}$$

car c'est une série alternée avec $\left|\frac{(-1)^n}{n+3}\right| = \frac{1}{n+3}$ fonction décroissante de n qui tend vers 0 pour $n \to \infty$.

- Pour $x=2$, la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{4^n(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{3}{2} = \infty$$

(série harmonique).

L'intervalle de convergence de la série est $\boxed{[-6, 2)}$.

5. (i) A l'aide de la série de MacLaurin de $\dfrac{1}{1-x}$, déterminer celle de $\dfrac{1}{1+x^3}$ et donner son rayon de convergence.

(ii) En déduire la série de MacLaurin de $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}\,dx$.

(iii) Exprimer $\displaystyle\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^3}\,dx$ sous forme de série et estimer sa valeur avec une erreur d'au plus 10^{-6} (en valeur absolue). Combien de termes doit-on additionner? (Justifier votre réponse.)

(i) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ si } |x|<1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$$

si $|-x^3|<1$ c'est-à-dire si $|x|<1$.

Le rayon de convergence de cette série est $\boxed{R=1}$.

(ii) $$\int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}\right) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} \qquad (\text{si } |x|<1)$$

(iii) $$\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^3}\,dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}\right|_0^{0.1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} \cdot (10)^{-3n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)\,10^{3n+1}}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{4\times10^4} + \frac{1}{7\times10^7} - \dots$$

série alternée avec terme général décroissant vers 0.

$\dfrac{1}{7\times10^7} < 10^{-6} \Rightarrow$ Il suffit d'additionner 2 termes :

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{10} - \frac{1}{4\times10^4} = 0{,}099975 \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}$$