MAT 1722 A. Hiver 2011. Mercredi 2 février. 8h30–9h50 Prof. D. Roy

Examen de mi-session 1

Version B

Max = 20 pts

NOM de famille: SOLUTIONS

Prénom: ______________________

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (modèles TI30xx) sont autorisées. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- Chaque problème requiert une solution complète et claire. Une partie importante des points est allouée au développement.
- L'examen comporte cinq questions qui valent chacune de 4 points, pour un total de 20 points.

1. (a) Déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{(x-2)^{5/3}}\,dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donner sa valeur.

Cette intégrale est impropre car la fonction $\frac{3}{(x-2)^{5/3}}$ n'est pas définie en $x=2$. L'intégrale est convergente si et seulement si $\int_1^2$ et $\int_2^4$ sont convergentes. On a

$$\int \frac{3}{(x-2)^{5/3}}dx = 3\int (x-2)^{-5/3}dx = 3\,\frac{(x-2)^{-2/3}}{(-2/3)}+C = -\frac{9}{2}(x-2)^{-2/3}+C$$

donc

$$\int_1^2 \frac{3}{(x-2)^{5/3}}dx = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t \frac{3\,dx}{(x-2)^{5/3}} = \lim_{t\to 2^-}\left[-\frac{9}{2}(x-2)^{-2/3}\right|_1^t$$

$$= \lim_{t\to 2^-}\left(-\frac{9}{2}(t-2)^{-2/3}+\frac{9}{2}(-1)^{-2/3}\right) = -\frac{9}{2}\lim_{t\to 2^-}\frac{1}{(t-2)^{2/3}}+\frac{9}{2}$$

$$= -\infty\,.$$

Ainsi $\int_1^2 \frac{3}{(x-2)^{5/3}}dx$ est divergente, donc $\boxed{\int_1^4 \frac{3}{(x-2)^{5/3}}dx \text{ est divergente}}$.

(b) Utiliser un test de comparaison pour déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3+\sin x}{x^3+5x}\,dx$ est convergente ou divergente.

On a $\quad 3+\sin(x) \leqslant 4$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

et $\quad x^3+5x \geqslant x^3$ pour tout $x\geqslant 0$.

Donc $$\frac{3+\sin(x)}{x^3+5x} \leqslant \frac{4}{x^3+5x} \leqslant \frac{4}{x^3} \quad \text{pour tout } x\geqslant 0$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{3+\sin(x)}{x^3+5x}dx \leqslant \int_1^\infty \frac{4}{x^3}dx = \frac{4}{2} = 2 < \infty.$$

Comme $\frac{3+\sin(x)}{x^3+5x}$ est à valeurs positives sur $[1,\infty)$ (car $3+\sin(x)\geqslant 2>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$), le test de comparaison montre que $\int_1^\infty \frac{3+\sin(x)}{x^3+5x}dx$ est convergente (et $\leqslant 2$).

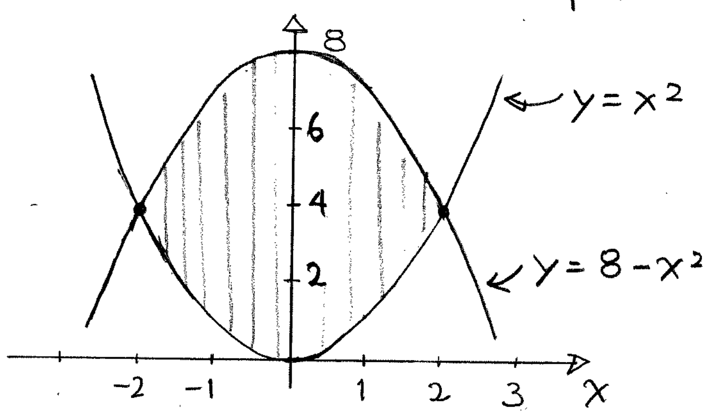
2. Dessiner la région bornée du plan délimitée par les courbes $y = x^2$ et $y = 8 - x^2$. Quelle est l'aire de cette région?

Les courbes se rencontrent en les points (x, y) tels que

$$y = x^2 \text{ et } y = 8 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 8 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Donc les courbes se coupent en $(-2,4)$ et $(2,4)$.

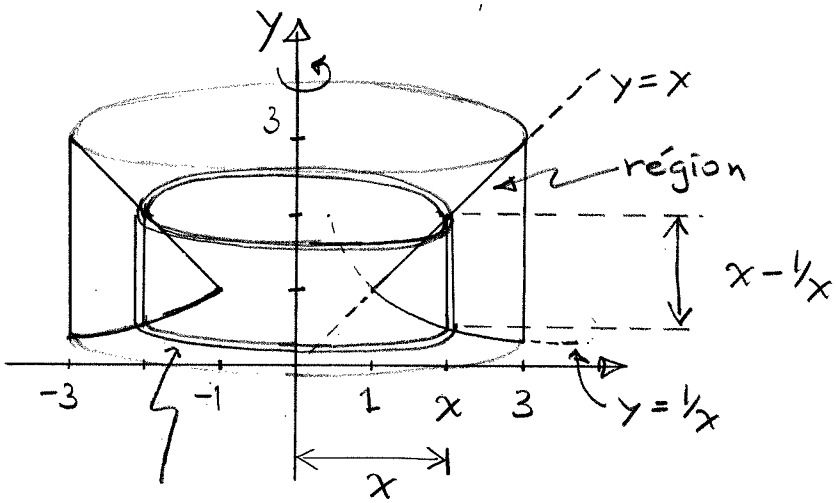


La région est décrite par $-2 \leq x \leq 2$ et $x^2 \leq y \leq 8 - x^2$.
Son aire est donc

$$\int_{-2}^{2} \left((8 - x^2) - x^2 \right) dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\, dx$$

$$= \left[8x - \frac{2}{3}x^3 \right|_{-2}^{2} = \boxed{\frac{64}{3}} \cong 21.33$$

3. Soit S le solide de révolution obtenu par rotation autour de l'axe des y de la région du plan bornée par $y = x$, $y = 1/x$, $x = 1$ et $x = 3$. Utiliser la méthode des cylindres pour calculer le volume de S en dessinant d'abord la trace de ce solide dans le plan xy ainsi qu'un cylindre typique dont l'aire entre dans le calcul du volume (avec ses dimensions).



≅ cylindre mince d'épaisseur Δx de hauteur $x - 1/x$ et de rayon x.

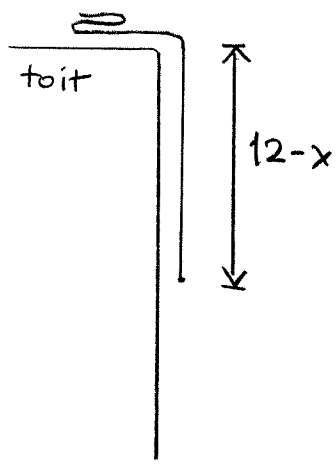
Volume de ce cylindre ≅ surface × Δx

$$\cong 2\pi x \left(x - \frac{1}{x}\right) \Delta x$$

$$\Rightarrow \text{vol}(S) = \int_1^3 2\pi x \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^3 2\pi (x^2 - 1)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - x \,\Big|_1^3 = 2\pi \left(6 + \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{40\pi}{3}} \cong 41.89$$

4. Une lourde corde, longue de 12 mètres, possède une densité de 1.5 kg/m et pend depuis le toit d'un bâtiment très haut. Déterminer le travail requis pour la hisser au complet sur le toit. Définir clairement en mots chacune des variables employées et indiquer leur signification sur un dessin. On rappelle que l'accélération gravitationnelle (à la surface) est $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$.



Soit x la longueur de corde sur le toit.

Lorsqu'on a hissé x mètres de corde sur le toit, il en pend $12-x$ mètres.
La masse de ces $12-x$ mètres de corde est

$$(12-x)\cdot 1.5\ \mathrm{kg}$$

et son poids est

$$(12-x)\cdot 1.5 g = 14.7(12-x)\ \mathrm{N}.$$

Le travail requis pour hisser Δx mètres de corde de plus est environ

$$\text{poids} \times \Delta x = 14.7\,(12-x)\,\Delta x.$$

Lorsqu'on hisse toute la corde, x passe de 0 à 12. Le travail accompli est alors

$$\int_0^{12} 14.7\,(12-x)\,dx = 14.7\left[12x - \frac{x^2}{2}\right|_0^{12}$$

$$= 14.7 \times 72$$

$$= 1058.4\ \mathrm{J}.$$

5. (a) Donner la formule intégrale pour la valeur moyenne de la fonction $f(x) = \arcsin(x)$ sur l'intervalle $[0, 1/2]$ puis la calculer.

C'est $f_{moy} = \dfrac{1}{(1/2)} \displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,dx = 2\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,dx$.

On trouve

$$\int \underbrace{\arcsin(x)}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\arcsin(x)}_{v} - \int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{dv}$$

$$= x\arcsin(x) - \int \frac{(-\frac{1}{2}dt)}{\sqrt{t}} \quad \text{où } t = 1-x^2$$

$$= x\arcsin(x) + \sqrt{t} + C$$

$$= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\Rightarrow f_{moy} = 2\left[x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\,\right|_0^{1/2} = 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1\right) \cong 0.2556$$

(b) Résoudre le problème à valeur initiale : $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2y\,,\quad y(0) = 3\,.$

On trouve $\quad \dfrac{1}{2y}\,dy = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|y| = \arctan(x) + C$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 2\arctan(x) + 2C$$

$$\Rightarrow |y| = e^{2\arctan(x)}\cdot e^{2C}$$

$$\Rightarrow y = Ae^{2\arctan(x)} \quad \text{où } A = \pm e^{2C}$$

Comme $y(0) = 3$, on trouve $3 = Ae^{2\arctan(0)} = A$.

Donc $\boxed{y = 3e^{2\arctan(x)}}$