

Version 2

MAT 1720 A Automne 2010 17 novembre , 8:30 Prof. Sebban

TEST #2
Solutions

Max = 20

Numero d'étudiant: _____

- Durée: 80 min.
- Seules les calculatrices scientifiques de base sont permises: non-programmables, non-graphiques, et non capables de calculer des dérivées ou des intégrales. Les livres et les notes de cours ne sont pas permis.
- Travailler tous les problèmes dans l'espace fourni. Utiliser le verso des pages comme brouillon.
- Ecrivez *uniquement* avec de l'encre non-effaçable. Pas de crayon. Les graphes peuvent être faits à l'aide des crayons.
- Donnez des solutions complètes et claires. Des points partiels seront donnés si un travail consistant a été fourni.

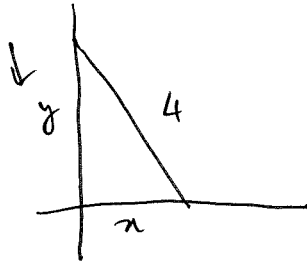
1. [3 points] Utiliser la dérivation logarithmique pour trouver la dérivée de $f(x) = \frac{\cos^2 x \arcsin x}{(x+1)^3}$.

$$\ln(f(x)) = 2 \ln \cos x + \ln \arcsin x - 3 \ln(x+1)$$

$$\text{Ainsi } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2 \cdot (-\sin x)}{\cos x} + \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{x+1}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\cos^2 x \arcsin x}{(x+1)^3} \left[-\frac{2 \sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} - \frac{3}{x+1} \right]$$

2. [3 points] Une échelle de 4 m de long est appuyée contre un mur. Le haut de l'échelle glisse contre le mur à la vitesse de 0.25 m/s vers le bas. À quelle vitesse le bas de l'échelle glisse-t-il contre le sol au moment où le pied de l'échelle se trouve à 1 m du mur?



$$\frac{dy}{dt} = -0.25 \text{ m/s}$$

on veut $\frac{dx}{dt}$ quand $x=1\text{m}$

Quand $x=1\text{m}$, $y = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15} \text{ m}$

Ainsi $\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{15}}{4} (-0.25 \text{ m/s})$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ m/s} \approx 0.9682 \text{ m/s}$$

3. [2 points] Trouver le maximum et le minimum absolus de $f(x) = x - 3 \ln x$ sur $[1, 5]$.

$$f(x) = x - 3 \ln x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{si } x = 3$$

$$f(1) = 1 - 3 \ln 1 = 1$$

$$f(3) = 3 - 3 \ln 3 \approx -0.2958$$

$$f(5) = 5 - 3 \ln 5 \approx 0.1717$$

$$\therefore \boxed{\text{max absolu est } 1} \quad (\text{en } x=1)$$

$$\boxed{\text{min absolu est } 3 - 3 \ln 3} \quad (\text{en } x=3)$$

4. [4 points] Trouver les limites suivantes:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x - x}{5x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x - x}{5x^2} \quad (0/0)$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \sin x - 1}{10x} \quad (\text{encore } 0/0)$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \cos x}{10}$

$= \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{5}}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x \quad 1^\infty$

soit $y = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$, alors $\ln y = x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{1/x} \quad (0/0)$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1-3/x} \cdot \frac{3}{x^2}}{-1/x^2} = -3$

$\therefore \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = e^{-3}}$

5. [2 points] Si $f''(x) = 6e^{3x} + 12x^2 + 4 \cos x$, Trouver la forme générale de f .

$$f'(x) = 2e^{3x} + 4x^3 + 4 \sin x + C$$

$$f(x) = \frac{2}{3} e^{3x} + x^4 - 4 \cos x + C + D$$

6. [6 points] On considère la fonction $y = f(x) = \frac{x}{x+4}$.

- (i) Trouver les asymptotes verticales et horizontales.
- (ii) Trouver les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les extremums locaux.
- (iii) Trouver les intervalles où f est convexe, concave ainsi que les points d'inflexion.
- (iv) Utiliser ces informations pour dessiner le graphe.

i, $f(x)$ n'est pas définie en $x = -4$, $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x}{x+4} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x}{x+4} = -\infty$

$x = -4$ est une asymptote verticale

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+4} = 1$, $y = 1$ est une asymptote horizontale

ii, $f'(x) = \frac{4}{(x+4)^2} > 0$ ($x \neq -4$). Ainsi $f(x)$ est toujours croissante.

Aucun extremum local.

iii, $f''(x) = \frac{-8}{(x+4)^3}$

Si $x < -4$ $f''(x) > 0$, $f(x)$ convexe

Si $x > -4$ $f''(x) < 0$, $f(x)$ concave

Aucun point d'inflexion.

