

Version 1

MAT 1720 A Automne 2010 17 novembre , 8:30 Prof. Sebban

TEST #2

Solutions

Max = 20

Numero d'étudiant: \_\_\_\_\_

- Durée: 80 min.
- Seules les calculatrices scientifiques de base sont permises: non-programmables, non-graphiques, et non capables de calculer des dérivées ou des intégrales. Les livres et les notes de cours ne sont pas permis.
- Travailler tous les problèmes dans l'espace fourni. Utiliser le verso des pages comme brouillon.
- Ecrivez *uniquement* avec de l'encre non-effaçable. Pas de crayon. Les graphes peuvent être faits à l'aide des crayons.
- Donnez des solutions complètes et claires. Des points partiels seront donnés si un travail consistant a été fourni.

1. [3 points] Utiliser la dérivation logarithmique pour trouver la dérivée de  $f(x) = \frac{\sin^2 x \arctan x}{(x+2)^2}$ .

$$f(x) = \frac{\sin^2 x \arctan x}{(x+2)^2}$$

$$\ln f(x) = \ln \frac{\sin^2 x \arctan x}{(x+2)^2}$$

$$= \ln(\sin^2 x) + \ln(\arctan x) - \ln((x+2)^2)$$

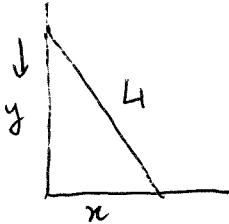
$$= 2 \ln \sin x + \ln(\arctan x) - 2 \ln(x+2)$$

$$\frac{d}{dx} (\ln f(x)) = \frac{d}{dx} 2 \ln \sin x + \frac{d}{dx} \ln(\arctan x) - \frac{d}{dx} 2 \ln(x+2)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\arctan x} \frac{1}{(1+x^2)} - 2 \frac{1}{x+2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\sin^2 x \arctan x}{(x+2)^2} \left[ \frac{2 \cos x}{\sin x} + \frac{1}{(1+x^2) \arctan x} - \frac{2}{x+2} \right]$$

2. [3 points] Une échelle de 4 m de long est appuyée contre un mur. Le haut de l'échelle glisse contre le mur à la vitesse de 0.25 m/s vers le bas. À quelle vitesse le bas de l'échelle glisse-t-il contre le sol au moment où le pied de l'échelle se trouve à 2 m du mur?



Soit  $y$  la position du haut de l'échelle, et  $x$  la distance entre le mur et le bas de l'échelle. On a  $\frac{dy}{dt} = -0.25 \text{ m/s}$

On cherche  $\frac{dx}{dt}$  quand  $x = 2 \text{ m}$ .

$$\text{On a: } x^2 + y^2 = 4^2 = 16$$

$$\text{Ainsi } \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(16)$$

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\text{c'est à dire: } \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\text{Quand } x = 2 \text{ m, } y = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} \text{ m} = 2\sqrt{3} \text{ m.}$$

$$\text{Ainsi } \frac{dx}{dt} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} (-0.25) \text{ m/s} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m/s}} \approx \boxed{0.4330 \text{ m/s}}$$

3. [2 points] Trouver le maximum et le minimum absolus de  $f(x) = x - 2 \ln x$  sur  $[1, 4]$ .

$$f(x) = x - 2 \ln x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{si } x = 2 \quad (\text{qui est dans l'intervalle}).$$

$$f(1) = 1 - 2 \ln(1) = 1$$

$$f(2) = 2 - 2 \ln 2 \approx 0.6137$$

$$f(4) = 4 - 2 \ln 4 \approx 1.2274$$

max absolu est	$4 - 2 \ln 4$	(à $x = 4$ )
et min absolu est	$2 - 2 \ln 2$	(à $x = 2$ )

4. [4 points] Trouver les limites suivantes:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x - x}{2x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos x - x}{2x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \sin x - 1}{4x} \quad \left(\text{encore } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \cos x}{4} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x \quad \text{c'est } 1^\infty$$

$$\text{soit } y = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x, \quad \ln y = x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}, \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{x}}\right) \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1 - \frac{2}{x}} = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln y} = \boxed{e^{-2}}$$

5. [2 points] Si  $f''(x) = 4e^{2x} + 6x^2 - 3\sin x$ , Trouver la forme générale de  $f$ .

$$f'(x) = 4e^{2x} + 6x^2 - 3\sin x$$

$$f'(x) = \frac{4}{2}e^{2x} + \frac{6}{3}x^3 + 3\cos x + C$$

$$= 2e^{2x} + 2x^3 + 3\cos x + C$$

Ainsi  $f(x) = \frac{2}{2}e^{2x} + \frac{2}{4}x^4 + 3\sin x + Cx + D$

$$f(x) = e^{2x} + \frac{1}{2}x^4 + 3\sin x + Cx + D$$

6. [6 points] On considère la fonction  $y = f(x) = \frac{x}{x+2}$ .

- (i) Trouver les asymptotes verticales et horizontales.
- (ii) Trouver les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les extremums locaux.
- (iii) Trouver les intervalles où  $f$  est convexe, concave ainsi que les points d'inflexion.
- (iv) Utiliser ces informations pour dessiner le graphe.

i)  $f(x)$  non définie en  $x = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x+2} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x+2} = -\infty$   
 $\therefore x = -2$  est asymptote verticale.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+2} = 1$   $\therefore y = 1$  est une asymptote horizontale.

ii,  $f'(x) = \frac{(1)(x+2) - x(1)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$  pour tout  $x \neq -2$

Ainsi  $f(x)$  est toujours croissante.  
 Aucun extremum local.

iii,  $f''(x) = \frac{-4}{(x+2)^3}$

Si  $x < -2$ ,  $f''(x) > 0$ ,  $f(x)$  convexe

Si  $x > -2$ ,  $f''(x) < 0$ ,  $f(x)$  concave

Mais il n'y a aucun point d'inflexion.

