MAT 1720 A   Automne 2010   6 octobre , 8:30   Prof. Sebbar

TEST #1

Max = 20

Solutions

Version 2.

Numero d'étudiant: ______________________________

- Durée: 80 min.

- Seules les calculatrices scientifiques de base sont pérmises: non-programmables, non-graphiques, et non capables de calculer des derivées ou des intgerales. Les livres et les notes de cours ne sont pas permis.

- Travailler tous les problèmes dans l'éspace fourni. Utiliser le verso des pages comme brouillon.

- Ecrivez *uniquement* avec de l'encre non-effacable. Pas de crayon. Les graphes peuvent être faits à l'aide des crayons.

- Donnez des solutions complètes et claires. Des points partiels seront donnés si un travaill consistant a été fourni.

1. [2 points] Résoudre pour x: $e^{3x+2} = 4$.

Si $e^{3x+2} = 4$

alors $3x+2 = \ln 4$

Ainsi $\boxed{x = \frac{1}{3}(\ln 4 - 2)} \simeq \boxed{-0.2046}$

2. [2 points] Trouver la formule de la réciproque de $f(x) = \ln(x+4)$.

Si $y = \ln(x+4)$

alors $e^y = e^{\ln(x+4)} = x+4$

Ainsi $x = e^y - 4$

$y = e^x - 4$ $\boxed{f^{-1}(x) = e^x - 4}$

3. [2 points] Utiliser les dérivées connues de $\sin x$ et $\cos x$, pour montrer que $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \left(\frac{-1}{\sin x}\right)\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \boxed{-\csc x \cot x}$$

4. [4 points] Si la position d'un objet mobile est donnée par $s(t) = 3t^2 + 2t$,

(a) Trouver la vitesse moyenne sur

(i) $[1, 1.1]$

$$\frac{s(1.1) - s(1)}{1.1 - 1} = \frac{5.83 - 5}{0.1} = \boxed{8.3}$$

(ii) $[1, 1.01]$

$$\frac{s(1.01) - s(1)}{1.01 - 1} = \frac{5.0803 - 5}{0.01} = \boxed{8.03}$$

(iii) $[1, 1.001]$

$$\frac{s(1.001) - s(1)}{1.001 - 1} = \frac{5.008003 - 5}{0.001}$$
$$= \boxed{8.003}$$

(b) Estimez la vitesse instantanée en $t = 1$

$$\boxed{8}$$

5. [5 points] Utiliser **la définition de la dérivée** pour trouver $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$. Puis utiliser la règle des quotients pour les dérivées pour vérifier votre réponse.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{2(x+h)}{x+h-2} - \frac{2x}{x-2} \right)$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{2(x+h)(x-2) - 2x(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)} \right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{2(x^2 + xh - 2x - 2h) - 2x^2 - 2xh + 4x}{(x+h-2)(x-2)} \right]$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{-4h}{(x+h-2)(x-2)} \right) = \frac{-4}{(x+h-2)(x-2)}$$

Ainsi $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4}{(x+h-2)(x-2}$

$$f'(x) = \boxed{\frac{-4}{(x-2)^2}}$$

En utilisant la règle du quotient:

$$\left(\frac{2x}{x-2} \right)' = \frac{(2)(x-2) - 2x(1)}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}.$$

6. [5 points] Dérivez les fonctions suivantes:

(a) $f(x) = 2e^x - x^3 + 5$

(b) $g(t) = 7\sin t + 4t^2$

(c) $y = 3x^{4/3} - x^{1/2}$

(d) $f(x) = 2x^3 e^x \cos x$

(a) $\boxed{f'(x) = 2e^x - 3x^2}$

(b) $\boxed{g'(t) = 7\cos t + 8t}$

(c) $\frac{dy}{dx} = \boxed{4x^{1/3} - \frac{1}{2}x^{-1/2}}$ $\left(\text{ou } 4x^{1/3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

(d) $\boxed{f'(x) = 6x^2e^x\cos x + 2x^3e^x\cos x - 2x^3e^x\sin x}$

(on peut aussi factoriser par $2x^2e^x$.)