MAT 1720 A Automne 2010 6 octobre , 8:30 Prof. Sebbar

TEST #1

Max = 20

Solutions

version 1

Numero d'étudiant: ______________________________

- Durée: 80 min.
- Seules les calculatrices scientifiques de base sont pérmises: non-programmables, non-graphiques, et non capables de calculer des derivées ou des intgerales. Les livres et les notes de cours ne sont pas permis.
- Travailler tous les problèmes dans l'éspace fourni. Utiliser le verso des pages comme brouillon.
- Ecrivez *uniquement* avec de l'encre non-effacable. Pas de crayon. Les graphes peuvent être faits à l'aide des crayons.
- Donnez des solutions complètes et claires. Des points partiels seront donnés si un travaill consistant a été fourni.

1. [2 points] Résoudre pour x: $e^{2x+5} = 3$.

Si $e^{2x+5} = 3$ alors $\ln(e^{2x+5}) = \ln 3$.

Ainsi $2x + 5 = \ln 3$

Il en suit $2x = \ln 3 - 5$

c'est à dire $\boxed{x = \frac{1}{2}(\ln 3 - 5)} \simeq \boxed{-1.95}$

2. [2 points] Trouver la formule de la réciproque de $f(x) = \ln(x+6)$.

Si $y = \ln(x+6)$

$e^y = e^{\ln(x+6)} = x+6$

Ainsi $x = e^y - 6$

$\boxed{y = e^x - 6}$

$\boxed{f^{-1}(x) = e^x - 6}$

3. [2 points] Utiliser les dérivées connues de $\sin x$ et $\cos x$, pour montrer que $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$.

$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$= \boxed{\frac{\sin x}{(\cos x)^2}} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \boxed{\sec x \tan x}$

4. [4 points] Si la position d'un objet mobile est donnée par $s(t) = 5t^2 + t$,

(a) Trouver la vitesse moyenne sur

(i) $[1, 1.1]$

$$\frac{s(1.1) - s(1)}{1.1 - 1} = \frac{7.15 - 6}{0.1} = \boxed{11.5}$$

(ii) $[1, 1.01]$

$$\frac{s(1.01) - s(1)}{1.01 - 1} = \frac{6.1105 - 6}{0.01} = \boxed{11.05}$$

(iii) $[1, 1.001]$

$$\frac{s(1.001) - s(1)}{1.001 - 1} = \frac{6.011005 - 6}{0.001} = 11.005$$

(b) Estimez la vitesse instantanée en $t = 1$

$$\boxed{11}$$

5. [5 points] Utiliser **la définition de la dérivée** pour trouver $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$. Puis utiliser la règle des quotients pour les dérivées pour vérifier votre réponse.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{3(x+h)}{x+h-1} - \frac{3x}{x-1}}{h}$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{3(x+h)(x-1) - 3x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{3(x^2 - x + xh - h) - 3x^2 - 3xh + 3x}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \frac{1}{h} \left(\frac{-3h}{(x+h-1)(x-1)} \right) = \frac{-3}{(x+h-1)(x-1)}$$

Ainsi: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{-3}{(x+h-1)(x-1)} = \boxed{\dfrac{-3}{(x-1)^2}}$

En utilisant la règle du quotient:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x-1}\right) = \frac{3(x-1) - 3x(1)}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{-3}{(x-1)^2}}$$

6. [5 points] Dérivez les fonctions suivantes:

(a) $f(x) = 3e^x + x^2 - 7$

(b) $g(t) = 5\cos t + 3t^3$

(c) $y = 2x^{5/2} - x^{1/3}$

(d) $f(x) = 2x^2 e^x \sin x$

a) $\boxed{f'(x) = 3e^x + 2x}$

b) $\boxed{g'(t) = -5\sin t + 9t^2}$

c) $\boxed{\frac{dy}{dx} = 5x^{3/2} - \frac{1}{3}x^{-2/3}}$

d) $\boxed{f'(x) = 4x e^x \sin x + 2x^2 e^x \sin x + 2x^2 e^x \cos x}$

(On peut aussi factoriser par $2xe^x$.