MAT 1730, Automne 2013 Devoir 3

Prof : Rachelle Miron

À remettre le jeudi 10 octobre **avant** 19h00.

Les devoirs en retard ou non agrafés ne seront pas acceptés.

SVP ne pas déranger les professeurs du départment pour une brocheuse!

Nom, Prénom ______________________ Numéro d'étudiant ______________________

Mon DGD (Encercler): DGD 1 (FSS1030) DGD 2 (FTX232) DGD 3 (MNT207)

En signant ci-dessous, vous déclarez que le travail remis est original et a été écrit par vous et que vous n'avez pas copié sur quiconque ou de tout autre source.

Signature ______________________

Question 1. En utilisant la définition de la dérivée, calculer $f'(3)$ pour la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Réponse: $\boxed{y = -\frac{1}{16}}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+h+1}}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+h+1}}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+1-(x+h+1)}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+h+1}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+h+1})} \\
&= \frac{-1}{(x+1)(2\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Alors,

$$f'(3) = \frac{-1}{2(3+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{16}$$

Question 2. Calculez la dérivée et déterminez le(s) point(s) critique(s) (si elle existe).

a) $f(x) = x^3 - x + 5$

- Dérivée: $f'(x) = \boxed{3x^2 - 1}$
- Point(s) critique(s): $\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}}$

- Dérivée:

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

- Point(s) critique(s):

$$3x^2 - 1 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

b) $g(x) = e^{x^3+2x}$

- Dérivée: $g'(x) = \boxed{(3x^2 + 2)e^{x^3+2x}}$
- Point(s) critique(s): $\boxed{\text{Aucun point critique}}$

- Dérivée:

$$g'(x) = (3x^2 + 2)e^{x^3+2x}$$

- Point(s) critique(s):

$$(3x^2 + 2)e^{x^3+2x} = 0$$
$$3x^2 + 2 \neq 0, \quad e^{x^3+2x} \neq 0$$

c) $h(x) = \frac{2x^3}{2x+1}$

- Dérivée: $h'(x) = \boxed{\dfrac{2x^2(4x+3)}{(2x+1)^2}}$
- Point(s) critique(s): $\boxed{x = -\frac{3}{4},\ x = 0}$

- Dérivée:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{6x^2(2x+1) - 2x^3(2)}{(2x+1)^2} = \frac{8x^3+6x^2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2(4x+3)}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

- Point(s) critique(s):

$$\begin{aligned} \frac{2x^2(4x+3)}{(2x+1)^2} &= 0 \\ 2x^2(4x+3) &= 0 \\ x = -\frac{3}{4}, &\quad x = 0 \end{aligned}$$

d) $k(x) = \ln(5e^{x^2}(1-x^2)^2)$

- Dérivée: $k'(x) = \boxed{-\dfrac{2x(1+x^2)}{(1-x^2)}}$
- Point(s) critique(s): $\boxed{x = 0}$

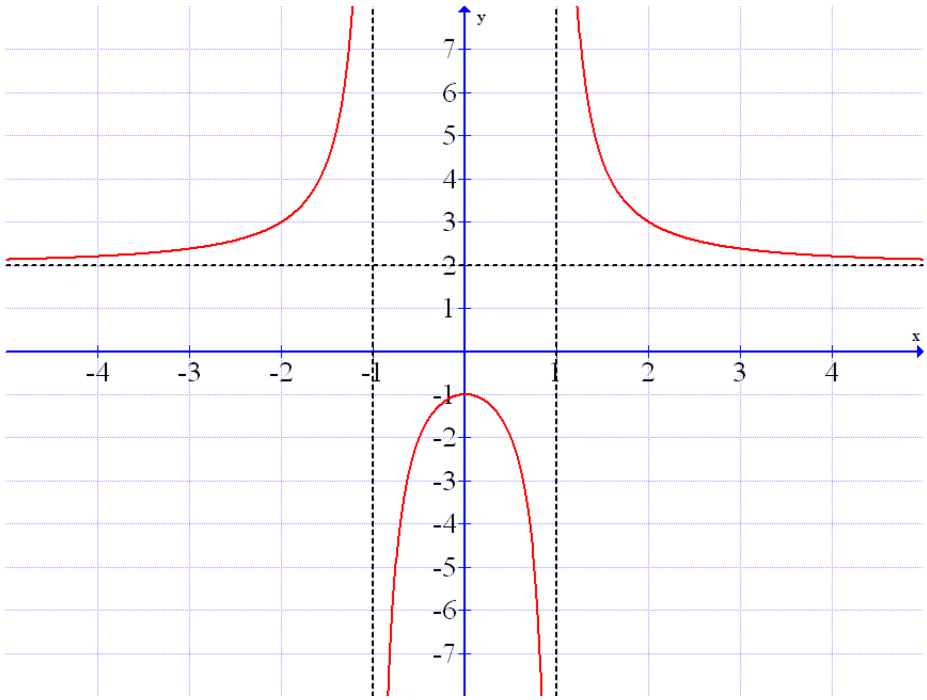
- Dérivée:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{5e^{x^2}(2x)(1-x^2)^2 - 5e^{x^2}2(1-x^2)(2x)}{5e^{x^2}(1-x^2)^2} = \frac{2x(1-x^2)^2 - 4x(1-x^2)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2x(1-x^2)(1-x^2-2)}{(1-x^2)^2} = -\frac{2x(1+x^2)}{(1-x^2)} \end{aligned}$$

- Point(s) critique(s):

$$\begin{aligned} -\frac{2x(1+x^2)}{(1-x^2)} &= 0 \\ 2x(1+x^2) &= 0 \\ x = 0, \quad 1+x^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

QUESTION 3. La figure ci-dessous est le graphe d'une fonction $f(x)$.



a) Donner le domaine de définition de la fonction $f(x)$. Réponse: $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}}$

b) Trouver les limites suivantes:

$\lim_{x \to 1^+} = \boxed{+\infty}$ $\quad \lim_{x \to 0} = \boxed{-1}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} = \boxed{2}$ $\quad \lim_{x \to 1^-} = \boxed{-\infty}$

c) Vrai ou faux, $x = 1$ est une asymptote verticale pour la fonction $f(x)$. Réponse: $\boxed{\text{Vrai}}$

d) Vrai ou faux, la fonction est croissante dans l'intervalle $]-\infty, -1[$. Réponse: $\boxed{\text{Vrai}}$

e) Est-ce que $x = 0$ est un point critique? Réponse: $\boxed{\text{Oui}}$

f) Vrai ou faux, $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $]-1, 1[$. Réponse: $\boxed{\text{Faux}}$

g) Est-ce que $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Réponse: $\boxed{\text{Oui}}$

h) Vrai ou faux, $f'(0) = 0$. Réponse: $\boxed{\text{Vrai}}$