1. L'intégrale indéfinie

MAT1732 A Automne 2014

Département de mathématiques et de statistique
Université d'Ottawa

Plan

Primitives

Définition

Soit $f(x)$ une fonction. La fonction $F(x)$ est une **primitive** *(anti-dérivée) de $f(x)$ sur un intervalle I si $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.*

Exemple

A) *Montrer que $F(x) = 2x^3$ est une primitive de $f(x) = 6x^2$.*

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3\right) = 6x^2 = f(x).$$

B) *Montrer que $F(x) = 2x^3 + 10$ est une primitive de $f(x) = 6x^2$.*

$$\frac{d}{dx}\left(2x^3 + 10\right) = 6x^2 + 0 = f(x).$$

REMARQUE: Une primitive pour $f(x)$ n'est pas unique!

Théorème

Soit $f(x)$ une fonction et $F(x)$ un primitive de $f(x)$ sur un intervalle I (donc $F'(x) = f(x)$). La fonction définie par

$$G(x) = F(x) + C,$$

$C \in \mathbb{R}$, est aussi une primitive de $f(x)$.

PREUVE:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(G(x)) &= \frac{d}{dx}(F(x) + C)\\ &= F'(x) + 0\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Donc $G(x)$ est une primitive de $f(x)$.

Définition

- **L'intégrale indéfinie** *d'une fonction f est la famille de primitives pour cette fonction.*
- *On dénote l'intégrale indéfinie par* $\int f(x)\,dx$.
- *Ainsi, si F est une primitive de f, on a*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$.
- *La fonction f est appelée* **l'intégrant** *et x la* **variable d'intégration**.
- *Le symbole dx indique que la variable d'intégration est x.*

Formules de base

- $\int k\,du = ku + C, k \in \mathbb{R}$
- $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$
- $\int e^u\,du = e^u + C$
- $\int \sin(u)\,du = -\cos(u) + C$
- $\int \cos(u)\,du = \sin(u) + C$
- $\int \sec^2(u)\,du = \tan(u) + C$
- $\int \csc^2(u)\,du = -\cot(u) + C$
- $\int \sec(u)\tan(u)\,du = \sec(u) + C$
- $\int \csc(u)\cot(u)\,du = -\csc(u) + C$
- $\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(u) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin(u) + C$

Propriétés de base

Théorème

- *Si F et G sont des primitives de f et g respectivement, alors $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$.*
- *Par conséquent,*

$$\int (af(x) + bg(x))\ dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx.$$

En résumé :

- L'intégrale indéfinie d'une somme de fonctions est la somme des intégrales indéfinies des fonctions de la somme.
- L'intégrale indéfinie du produit d'une fonction avec une constante est le produit de l'intégrale indéfinie de la fonction avec cete constante.

Exemple

Calculer l'intégrale indéfinie de $f(x) = x^4 + \dfrac{5}{1+x^2}$.

Solution :

- L'intégrale indéfinie est donnée par

$$\begin{aligned}\int \left(x^4 + \frac{5}{1+x^2} \right) dx &= \int x^4\, dx + 5 \int \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= \left(\frac{x^5}{5} \right) + 5\,(\arctan(x)) + C\end{aligned}$$

Substitutions

Théorème

On suppose que

1. *u est une fonction différentiable,*
2. *F est la primitive d'une fonction f, et*
3. *f et F sont définies sur l'image de u.*

- *Alors, $F(u(x))$ est une primitive de $f(u(x))u'(x)$.*
- *On en déduit la* **règle de substitution** *suivante :*

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(g(x)) + C$$

où $u = g(x)$

Pour appliquer la règle du substitution :

- On pose $u = g(x)$, alors $du = g'(x)dx$.
- On fait la substitution dans l'intégrale indéfinie

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{=u})\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{=du} = \int f(u)\,du$$

- On calcul l'intégrale indéfinie par rapport à la nouvelle variable u.
- On remplace les u par $g(x)$ dans l'expression finale.

Exemple

Calculez les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

Solution :

a)
- On pose $u = x^2$.
- Alors $du = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$.

$$\begin{aligned}
\int x\sin(x^2)\,dx &= \int x\sin(u)\left(\frac{du}{2x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \sin(u)\,du \\
&= \frac{1}{2}(-\cos(u)) + C \\
&= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C
\end{aligned}$$

Solution (suite) :

b)
- On pose $w = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 = w - 5$.
- Alors $dw = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{dw}{2x}$.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+5}}\,dx &= \int \frac{x^3}{\sqrt{(w)}}\left(\frac{dw}{2x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{w}}\,dw \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(w-5)}{\sqrt{w}}\,dw \\
&= \frac{1}{2}\int \left(w^{\frac{1}{2}} - 5w^{-\frac{1}{2}}\right)\,dw \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}w^{\frac{3}{2}} - 10w^{\frac{1}{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}} - 5\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}} + C
\end{aligned}
$$

Techniques d'intégrations | Substitutions

Solution (suite) :

Pour évaluer l'intégrale de fonctions trigonométriques, on a souvent recours aux identités trigonométriques suivantes :

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
3. $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
4. $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$
5. $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$

Exemple

Évaluez l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int \sin^2(x)\,dx$$

Solution :

- On utilise la formule de l'angle double pour obtenir

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos(2x))\,dx.$$

- On pose $w = 2x$.
- Alors, $dw = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{dw}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int (1 - \cos(2x))\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int (1 - \cos(w))\left(\frac{dw}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - \cos(w))\,dw \\
&= \frac{1}{4}(w - \sin(w)) + C \\
&= \frac{1}{4}((2x) - \sin(2x)) + C \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C
\end{aligned}$$

Intégration par parties

Théorème

Si $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions différentiables, on a

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Cette formule est connue sous le nom **d'intégration par parties**.

Exemple

Évaluer les intégrales indéfinies suivantes :

a) $\displaystyle\int x^2\cos(2x)\,dx$

b) $\displaystyle\int e^x\cos(x)\,dx$

Solution :

a)
- On pose $u = x^2$ et $dv = \cos(2x)\,dx$.
- Donc, $du = 2x\,dx$ et $v = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(2x)\,dx &= (x^2)\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) - \int\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)(2x)\;dx \\ &= \frac{x^2}{2}\sin(2x) - \int x\sin(2x)\,dx\end{aligned}$$

- On fait appel pour une seconde fois à la méthode d'intégration par parties pour $\int x\sin(2x)\,dx$

Solution (suite) :

- On pose $u = x$ et $dv = \sin(2x)\,dx$.
- Donc, $du = dx$ et $v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

$$\begin{aligned}&\int x^2\cos(2x)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\sin(2x) - \int x\sin(2x)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\sin(2x) - \left((x)\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)(1)\;dx\right) \\ &= \frac{x^2}{2}\sin(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\sin(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C \\ &= \frac{x^2}{2}\sin(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + C\end{aligned}$$

Solution (suite) :

b)
- Soit $I = \int e^x \cos(x)\, dx$.
- On pose $u = e^x$ et $dv = \cos(x)\, dx$.
- Donc, $du = e^x\, dx$ et $v = \sin(x)$.

$$I = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\, dx$$

- On fait appel pour une seconde fois à la méthode d'intégration par parties pour $\int e^x \sin(x)\, dx$
- On pose $u = e^x$ et $dv = \sin(x)\, dx$.
- Donc, $du = dx$ et $v = -\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)\, dx &= -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\, dx \\ &= -e^x \cos(x) + I\end{aligned}$$

Solution (suite) :

- En substituant cette expression, on obtient

$$\begin{aligned}I &= e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) + I) \\ 2I &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + C \\ I &= \frac{1}{2}\left(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)\right) + C \\ \int e^x \cos(x)\, dx &= \frac{1}{2}\left(e^x \sin(x) + e^x \cos(x)\right) + C\end{aligned}$$

Fractions partielles

La méthode des fractions partielles permet de calculer des intégrales de la forme

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont deux polynômes.

REMARQUE:
Dans ce cours $q(x)$ sera au polynôme de degré au plus 2 ($\deg(q(x)) \leq 2$).

Vous devez suivre les étapes suivantes pour calculer l'intégrale d'une fonction rationnelle,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx.$$

1. Si $\deg(p(x)) \geq \deg(q(x))$ on utilise la division polynômiale pour séparer la fonction rationnelle en plusieurs parties.

Exemple

Évaluer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$$

Solution :

- Puisque $p(x) = x^2 + 1$ et $q(x) = x - 1$, nous avons que $\deg(p(x)) = 2 > 1 = \deg(q(x))$.
- Alors on utilise la division polynômiale :

$$\frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$

- Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{2}{x-1}\right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C\end{aligned}$$

Solution (suite) :

Maintenant, on suppose que $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$.

2. Si $q(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ a deux racines réelles distincts, alors nous pouvons trouver deux nombres A et B tel que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{a}\left[\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}\right].$$

Ensuite, on intègre les deux termes.

Exemple

Évaluer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}\,dx$$

Solution :

- Puisque $p(x) = 2x + 1$ et $q(x) = x^2 + x - 2$, nous avons que $\deg(p(x)) = 1 < 2 = \deg(q(x))$.
- Alors on a pas besoin de la division polynômiale.
- Au lieu, nous factorisons $q(x)$:

$$q(x) = (x - 1)(x + 2).$$

- Ainsi, on cherche A et B qui satisfont

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\\ \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} &= \frac{(A+B)x + 2A - B}{(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

- Nous obtenons les équations

$$A + B = 2 \qquad \text{et} \qquad 2A - B = 1.$$

Solution (suite) :

- Ainsi, $A = B = 1$.
- Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\, dx &= \int \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right] dx \\ &= \ln|x-1| + \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Solution (suite) :

3. Si $q(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ admet seulement une racine réelle x_1, alors on évalue l'intégrale avec la substitution $w = x - x_1$.

Exemple

Évaluer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{x+5}{x^2 - 4x + 4}\, dx$$

Solution :

- Puisque $p(x) = x + 5$ et $q(x) = x^2 - 4x + 4$, nous avons que $\deg(p(x)) = 1 < 2 = \deg(q(x))$.
- Alors on a pas besoin de la division polynômiale.
- Nous factorisons $q(x)$:

$$q(x) = (x-2)^2.$$

- Donc

$$\int \frac{x+5}{x^2 - 4x + 4}\, dx = \int \frac{x+5}{(x-2)^2}\, dx.$$

Solution (suite) :

- Avec la substitution $w = x - 2$ et $dw = dx$ et $x + 2 = x$, alors l'intégrale devient

$$\begin{aligned}
\int \frac{(w+2)+5}{w^2}\,dw &= \int \frac{w+7}{w^2}\,dw \\
&= \int \frac{1}{w} + \frac{7}{w^2}\,dw \\
&= \ln|w| - \frac{7}{w} + C \\
&= \ln|x-2| - \frac{7}{x-2} + C
\end{aligned}$$

Solution (suite) :

4. Si $q(x) = ax^2 + bx + c$ ne possède aucune racine rélle, alors nous complétons le carrée pour obtenir

$$q(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = a\left[(x-A)^2 + B\right].$$

Ensuite, nous intégrons le résultat.

Exemple

Évaluer l'intégrale suivante :

$$\int \frac{3x+2}{x^2-2x+5}\,dx$$

Solution :

- Puisque $p(x) = 3x + 2$ et $q(x) = x^2 - 2x + 1$, nous avons que $\deg(p(x)) = 1 < 2 = \deg(q(x))$.
- Alors on a pas besoin de la division polynômiale.
- De plus, $q(x)$ n'a aucune racine rélle.
- Aisin on complète le carrée :

$$q(x) = x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 5 = (x-1)^2 + 4.$$

- Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^2-2x+5}\,dx &= \int \frac{3x+2}{(x-1)^2+4}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{3x+2}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx\end{aligned}$$

- On pose $w = \frac{x-1}{2} \Rightarrow x = 2w + 1$.
- Alors $dw = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2dw$.

Solution (suite) :

- Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int \frac{3x+2}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{3(2w+1)+2}{(u)^2+1}(2dw) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{6w}{w^2+1}\,dw + \frac{1}{2}\int \frac{5}{w^2+1}\,dw
\end{aligned}$$

- Pour la première partie, on pose $z = w^2+1$.
- Alors $dz = 2wdw \Rightarrow dw = \frac{dz}{2w}$.
- Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \frac{6w}{w^2+1}\,dw + \frac{1}{2}\int \frac{5}{w^2+1}\,dw &= \frac{1}{2}\int \frac{6w}{(z)}\left(\frac{dz}{2w}\right) + \frac{5}{2}\int \frac{1}{w^2+1}\,dw \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{1}{(z)}\,dz + \frac{5}{2}\arctan(w) \\
&= \frac{3}{2}\ln|z| + \frac{5}{2}\arctan(w) + C \\
&= \frac{3}{2}\ln|w^2+1| + \frac{5}{2}\arctan(w) + C \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{5}{4}\right| + \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

Solution (suite) :