MAT 1722 A Hiver 2014. Mercredi 5 février 8h30–9h50   Prof. Damien Roy

Examen de mi-session 1

NOM de famille: SOLUTIONS - VERSION B -

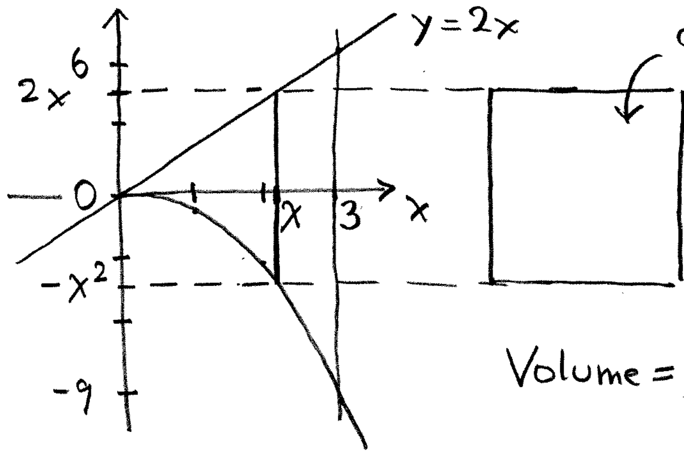
Prénom: ______________________

- Durée: 80 minutes.
- Seules les calculatrices allouées par la Faculté des Sciences (Texas Instruments TI-30, TI-34 et Casio fx-260, fx-300) sont autorisées. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
- Résoudre chaque problème dans l'espace prévu à cette fin. Utiliser le verso des pages comme brouillon si nécessaire.
- Les questions 1 à 4 sont à choix multiples et valent chacune 2 points. Encercler la réponse correcte.
- Les questions 5 et 6 sont à réponses brèves et valent chacune 2 points. Inscrire vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Les questions 7 et 8 sont à développement et valent chacune 4 points. Elles requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution.
- L'examen est noté sur 20.

Tâchez de ne pas mettre plus de 8 minutes (en moyenne) sur les questions 1 à 6, de sorte à réserver autour de 30 minutes pour les questions 7 et 8 qui valent davantage.

1. [2 pts] Déterminez le volume du solide à fond plat dont la base est la région bornée du plan délimitée par les courbes $y = 2x$, $y = -x^2$ et $x = 3$ et dont les sections perpendiculaires à l'axe des x sont des carrés.

A) 32.3 B) 54.4 C) 87.3 D) 114.1 E) 144.5 F) 165.6



carré de côté $2x-(-x^2) = x^2+2x$

son aire est

$$A(x) = (x^2+2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$\text{Volume} = \int_0^3 A(x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4}{3}x^3\right|_0^3 = \boxed{165.6}$$

2. [2 pts] En appliquant la méthode d'Euler avec pas de $h = 0.5$, estimez $y(3)$ où y est la solution du problème de Cauchy $y' = 2x^2 - y$, $y(2) = 6$.

A) 9.25 B) 9.625 C) 9.75 D) 10.005 E) 10.125 F) 10.25

$x_0 = 2$, $y(2) = y_0 = 6$

$x_1 = 2.5$, $y(2.5) \cong y_1 = y_0 + (2x_0^2 - y_0) \times 0.5$

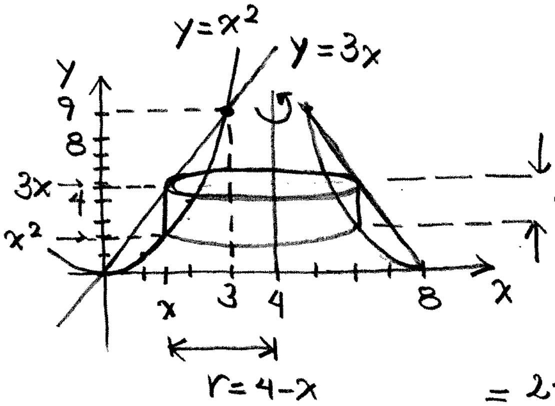
$= 6 + (2 \times 2^2 - 6) \times 0.5 = 7$

$x_2 = 3.0$, $y(3) \cong y_2 = y_1 + (2x_1^2 - y_1) \times 0.5$

$= 7 + (2 \cdot (2.5)^2 - 7) \times 0.5 = \boxed{9.75}$

3. [2 pts] Calculez le volume du solide de révolution obtenu par rotation autour de la droite verticale $x = 4$ de la région bornée du plan délimitée par la courbe $y = x^2$ et la droite $y = 3x$.

A) $(17/3)\pi$ B) 8π C) $(19/2)\pi$ D) 14π E) $(35/3)\pi$ F) $(45/2)\pi$



$$Vol = \int_0^3 A(x)\,dx$$

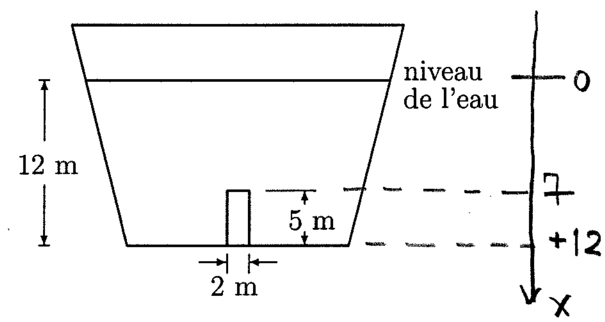
$$= \int_0^3 2\pi(4-x)(3x-x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^3 (12x-7x^2+x^3)\,dx = 2\pi\left[6x^2-\frac{7}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\right|_0^3$$

$$= 2\pi\left(54-63+\frac{81}{4}\right) = \frac{45}{2}\pi$$

4. [2 pts] La digue d'un barrage est percée à sa base d'une porte rectangulaire de 2 m de largeur et de 5 m de hauteur. Calculez la force hydrostatique sur la porte sachant que le niveau d'eau dans le barrage est de 12 m. On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000$ Kg/m^3 et on utilise $g = 9.8$ m/s^2 comme valeur de l'accélération à la surface de la terre.

A) 9.31×10^5 N B) 1.029×10^6 N
C) 1.127×10^6 N D) 1.225×10^6 N
E) 1.323×10^6 N F) 1.421×10^6 N



Soit x = la profondeur mesurée à partir du niveau de l'eau.

Surface de la portion de porte entre les profondeurs x et $x+\Delta x$

$$\Delta S = 2\Delta x$$

Force hydrostatique sur cette portion :

$$\Delta F \cong (\text{pression})\times(\text{surface}) \cong (1000g\,x)(2\Delta x) \cong 19600\,x\,\Delta x$$

Force totale

$$F = \int_7^{12} 19600\,x\,dx = 19600\left[\frac{x^2}{2}\right|_7^{12} = 9.31\times 10^5\ \text{N}$$

5. [2pts] (Question à réponses brèves) On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2}{1+4x^2}.$$

(i) Déterminez sa solution générale.

Réponse: $\boxed{y = -\frac{1}{C+2\arctan(2x)}}$

(ii) Déterminez sa solution particulière pour laquelle $y(0) = 1/2$.

Réponse: $\boxed{y = \frac{1}{2-2\arctan(2x)}}$

(i) $$\underbrace{\int \frac{dy}{y^2}}_{= -1/y} = \int \frac{4}{1+4x^2}\,dx = \int \frac{2\,du}{1+u^2} \quad \text{en posant } u = 2x$$

$$= 2\arctan(u) + C$$

$$= 2\arctan(2x) + C$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{C+2\arctan(2x)}$$

(ii) $$y(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{C} \Rightarrow \boxed{C=-2} \Rightarrow y = \frac{1}{2-2\arctan(2x)}$$

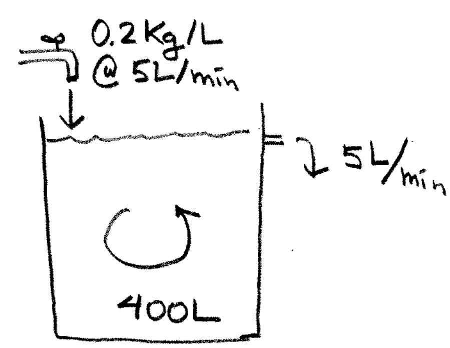
6. [2pts] (Question à réponse brève) Une citerne est remplie initialement de 400 L de saumure contenant 10 kg de sel dissous. Une autre saumure qui contient 0.2 kg/L de sel y est déversée à raison de 5 L/min. La solution est constamment brassée et évacuée au même taux de sorte que son volume total ne change pas. Soit $Q(t)$ la quantité de sel dissous (en kg) dans la citerne au temps t (en minutes). Établissez une équation différentielle pour $Q(t)$.

Réponse: $\boxed{\frac{dQ}{dt} = \frac{80-Q}{80}}$

$$\frac{dQ}{dt} = (\text{taux entrant}) - (\text{taux sortant})$$

$$= 5 \times 0.2 - 5 \times \frac{Q}{400}$$

$$= 1 - \frac{Q}{80} = \frac{80-Q}{80}$$



$Q(0) = 10.$

7. (i) [2 pts] Déterminez si l'intégrale impropre $\int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{1/3}}\,dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez sa valeur exacte. **Attention à la rédaction.** En particulier, prenez soin aux signes d'égalités et aux limites.

Solution: On a une singularité en $x=8$. En posant $u=8-x$, on trouve

$$\int \frac{x}{(8-x)^{1/3}}dx = \int \frac{8-u}{u^{1/3}}(-du) = \int \frac{u-8}{u^{1/3}}du = \int u^{2/3}du - 8\int u^{-1/3}du$$

$$= \frac{u^{5/3}}{5/3} - 8\,\frac{u^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{5}(8-x)^{5/3} - 12(8-x)^{2/3} + C$$

$$\Rightarrow \int_0^8 \frac{x}{(8-x)^{1/3}}dx = \lim_{t\to 8^-} \int_0^t \frac{x}{(8-x)^{1/3}}dx$$

$$= \lim_{t\to 8^-} \left[\frac{3}{5}(8-x)^{5/3} - 12(8-x)^{2/3}\right|_0^t$$

$$= \lim_{t\to 8^-} \left(\left(\frac{3}{5}(8-t)^{5/3} - 12(8-t)^{2/3}\right) - \left(\frac{3}{5}\cdot 8^{5/3} - 12\cdot 8^{2/3}\right)\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{96}{5} - 48\right) = \boxed{\frac{144}{5}}$$ intégrale <u>convergente</u> !

(ii) [2 pts] À l'aide d'un test de comparaison, déterminez si $\int_1^\infty \frac{3\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+x^3}\,dx$ est convergente ou divergente. Si elle est convergente, donnez un majorant de sa valeur. Justifiez clairement chaque étape de votre raisonnement.

Solution: Pour $x \in [1,\infty)$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} 3\sqrt{x} \leqslant 3\sqrt{x}+1 \leqslant 4\sqrt{x} \\ x^3 \leqslant 2\sqrt{x}+x^3 \leqslant 3x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{3\sqrt{x}}{3x^3}}_{=\frac{1}{x^{5/2}}} \leqslant \frac{3\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+x^3} \leqslant \underbrace{\frac{4\sqrt{x}}{x^3}}_{=\frac{4}{x^{5/2}}}$$

$$\int_1^\infty \frac{4}{x^{5/2}}dx = \frac{4}{5/2-1} = \frac{8}{3}$$

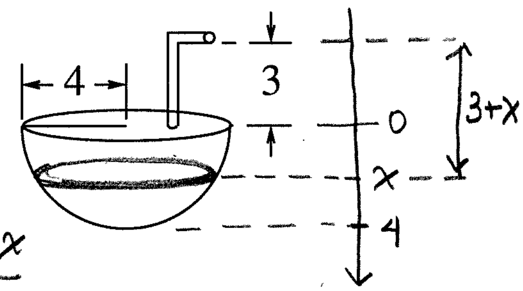
$\Rightarrow$ L'intégrale est convergente et $\int_1^\infty \frac{3\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+x^3}dx \leqslant \int_1^\infty \frac{4}{x^{5/2}}dx = \frac{8}{3}$

8. [4 pts] Un réservoir a la forme d'un hémisphère de 4 m de rayon, ouvert vers le haut, et il est rempli d'eau. Calculez le travail requis pour pomper toute son eau à 3 m au-dessus du réservoir. (On rappelle que la densité de l'eau est $\rho = 1000$ Kg/m^3 et que $g \cong 9.8$ m/s^2.)

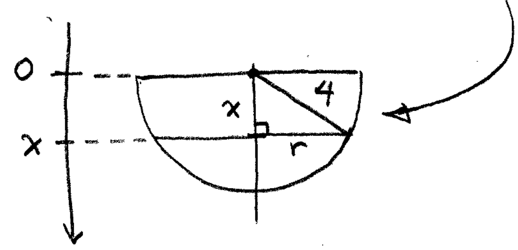
Décrivez en mots les variables qui entrent dans votre solution et indiquez sur un dessin leur signification.

Solution:

Soit x = la profondeur mesurée à partir du dessus du réservoir.



La section horizontale à la profondeur x est un disque de rayon $r = \sqrt{4^2 - x^2}$



(théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle dessiné sur la figure de gauche)

$\Rightarrow$ aire de cette section $= \pi r^2 = \pi(16 - x^2)$

Volume d'eau compris entre x et $x + \Delta x$:

$$\Delta V \cong \pi r^2 \Delta x = \pi(16 - x^2)\Delta x$$

Poids de cette couche d'eau

$$\Delta P = \rho g \Delta V \cong \rho g \pi (16 - x^2)\Delta x$$

Travail pour la pomper à 3 m au-dessus du réservoir

$$\Delta W \cong (3 + x)\Delta P \cong \rho g \pi (3 + x)(16 - x^2)\Delta x$$

$$\Rightarrow W = \int_0^4 \rho g \pi (3 + x)(16 - x^2)\,dx = \rho g \pi \int_0^4 (48 + 16x - 3x^2 - x^3)\,dx$$

$$= 9800\pi \left[48x + 8x^2 - x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^4 = 9800\pi \times 192 \cong \boxed{5.911 \times 10^6 \text{ J}}$$