Université d'Ottawa • University of Ottawa
Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique
Faculty of Science
Mathematics and Statistics

# MAT 1741 A – Test 2 / Groupe 1 - 2

**Professeur : Farid El Ktaibi**

**29 septembre, 2014**

Nom : Solutions .

Prénom :

Numéro d'étudiant :

| | | |
|---|---|---|
| Réponse choix multiples → | 1 | E |
| | 2 | D |
| | 3 | E |
| Pour le correcteur → | 4 | |
| | 5 | |
| | 6 | |
| | [Bonus] 7 | |
| | Total | |

- La durée de cet examen est **80 minutes.**
- Cet examen est à livre fermé et vos notes de cours ne seront pas allouées. L'utilisation de calculatrice, téléphone cellulaire, pagette ou tout autre appareil qui peut transmettre ou stocker de l'information **n'est pas permise.**
- Prenez le temps de lire tout le document avant de commencer et lisez chaque question attentivement. **Répondez à toutes les questions dans l'espace fourni après chaque question**. Pour les questions 4 à 7, vous pouvez utiliser l'endos des pages si vous en avez de besoin, par contre n'oubliez pas de l'indiquer pour le correcteur.
- Les questions 1 à 3 sont à choix multiples et valent 1 point chacune. Il n'y aura aucun point partiel. Vous devez écrire votre réponse dans le tableau fourni ci-dessus.
- Les questions 4 à 6 valent 6 points chacune et des points partiaux peuvent être mérités. **Les bonnes réponses pour ces questions doivent être justifiées et écrites de façon logique et lisible; vous devez convaincre le correcteur que vous savez pourquoi votre réponse est la bonne.** Question 7 est une question bonus qui vaut 3 points.
- Lorsque vous le pouvez, il est fortement recommandé de vérifier votre travail.

## Bonne Chance!

585, av. King-Edward C.P. 450, Succ. A
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada
585 King Edward Ave., P.O. Box 450, Stn. A
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

**1.** Soit $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz = 0\}$. Alors,

A. $(0,0,0) \notin W$ mais $W$ est fermé sous l'addition.

B. $(0,0,0) \in W$ mais $W$ n'est pas fermé sous la multiplication par scalaires.

C. $W$ est fermé sous l'addition et $W$ est fermé sous la multiplication par scalaires.

D. $W$ est fermé sous l'addition mais $W$ n'est pas fermé sous la multiplication par scalaires.

E. $W$ n'est pas fermé sous l'addition mais $W$ est fermé sous la multiplication par scalaires.

F. Aucun des énoncés ci-dessus est vrai.

- $(0,0,0) \in W$ car $0 \times 0 = 0$
- Soit $(x,y,z) \in W \Rightarrow xz = 0$
  donc $(kx)(kz) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$ d'où $k(x,y,z) = (kx, ky, kz) \in W$, $\forall k \in \mathbb{R}$
- $(1,0,0) \in W$ et $(0,0,1) \in W$ mais $(1,0,0) + (0,0,1) = (1,0,1) \notin W$

Réponse : E

**2.** Parmi les ensembles suivants, lesquel est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2,2}$ ?

A. $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2,2} \mid a,b,c,d \text{ entiers.} \right\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ mais $\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$

B. $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2,2} \mid bc = 0;\ a,d \in \mathbb{R} \right\}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in B$ mais $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin B$

C. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & b \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2,2} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin C$

D. $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2,2} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D$ ; $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & c_1+c_2 \end{pmatrix} \in D$ ;

E. $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2,2} \mid ad = 1;\ b,c \in \mathbb{R} \right\}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin E$

F. Aucun des ensembles ci-dessus est un sous-espace de $\mathbb{M}_{2,2}$.

$k\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ -kb & kc \end{pmatrix} \in D$

Réponse : D

**3.** Lesquels parmi les ensembles suivants sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ ?

(1) $\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+1 = y = z-2\}$ $(0,0,0) \notin (1)$

(2) $\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5z = 0\}$ plan dans $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$

(3) $\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid yz = 0\}$ $(1,0,1) \in (3)$, $(1,1,0) \in (3)$ mais $(1,0,1)+(1,1,0) = (1,1,1) \notin ($

(4) $\{(x+y,\ 2x,\ 2x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ $\cdot$ $(0,0,0) \in (4)$

$\cdot$ $(x_1+y_1, 2x_1, 2x_1+y_1) + (x_2+y_2, 2x_2, 2x_2+y_2) = \cancel{((x_1+x_2)+(y_1+y_2), 2(x_1+x_2), 2(x_1+x_2)}$

$= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), 2(x_1+x_2), 2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)) \in (4)$

$\cdot$ $k(x+y, 2x, 2x+y) = (kx+ky, 2kx, 2kx+ky) \in (4)$

A. (1) et (2)

B. (1), (3) et (4)

C. (3) et (4)

D. (1) et (3)

E. (2) et (4)

F. (2) et (3)

Réponse : E, (2) et (4)

**4.** Soit $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$.

2pts a) Expliquez brièvement pourquoi $W$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. (*Vous n'aurez pas besoin d'utiliser le test des sous-espaces - utilisez les observations que nous avions fait en classe.*)

2pts b) Déterminez un ensemble générateur pour $W$.

2pts c) Donnez une description géométrique complète de $W$.

*(N'oubliez pas de justifier vos réponses.)*

a) $W$ est un plan passant par l'origine, donc $W$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$

b) soit $(x, y, z) \in W$

$\Rightarrow \quad x - y + 3z = 0$

$\Rightarrow \quad x = y - 3z$

$\Rightarrow \quad (x, y, z) = (y - 3z, y, z)$

$= y(1,1,0) + z(-3,0,1)$

$\Rightarrow \{(1,1,0), (-3,0,1)\}$ est un ensemble générateur pour $W$ (D'autres réponses sont correctes)

c) $W$ est un plan dans $\mathbb{R}^3$, de vecteur normal $\vec{n} = (1,-1,3)$, qui passe par l'origine.

**5.** Soit $\mathbb{M}_{2,2}$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $2 \times 2$ avec éléments réels et soit

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2,2} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Démontrez que $U$ est fermé sous l'addition. Est-ce que ceci est suffisant pour démontrer que c'est un sous-espace de $\mathbb{M}_{2,2}$ ?

(Pour (b) et (c) vous pouvez prendre pour acquis que $U$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{2,2}$.)

b) Trouvez un ensemble générateur pour $U$.

c) Donnez une matrice $A \in \mathbb{M}_{2,2}$ tel que $A \notin U$.

*(N'oubliez pas de justifier vos réponses.)*

2pts a) Soient $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} \in U$

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & -(a_1+a_2) \end{pmatrix} \in U$ et U est fermé sous l'addition.

2pts b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est un ensemble générateur pour $U$

2pts c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin U$ (Autres réponses peuvent être correctes).

<u>Suite de (a)</u>

Non, il faut verifier que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ et que $U$ est fermé sous la multiplication par scalaires.

**6.** Indiquez si chacun des énoncés suivants est (toujours) vrai ou est (possiblement) faux, dans la case donnée.

- Si vous indiquez qu'un énoncé est (possiblement) faux, vous devez **donner un contre-exemple avec des nombres!**
- Si vous indiquez que l'énoncé est (toujours) vrai, vous devez expliquer clairement votre raisonnement.

1,5 pts a) $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2,2} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace de $\mathbb{M}_{2,2}$.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$
- $\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & c_1+c_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix} \in A \quad ; \forall a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$
- $k\begin{pmatrix} a & c \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kc \\ kb & kc \end{pmatrix} \in A \quad ; \forall a, b, c, k \in \mathbb{R}$.

RÉPONSE : Vrai

1,5 pts b) $X = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$

Soit, par exemple, $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$-f(x) = -1 < 0$

$\Rightarrow -f \notin X$

$\Rightarrow X$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$

RÉPONSE : Faux

**6 (suite).**

1,5 pts c) Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $U$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U$, alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ appartiennent à $U$.

Contre-exemple (n'est pas unique !!) :

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 2x\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ (droite passant par l'origine)

On a $(1,0)+(0,2) = (1,2) \in A$ mais $(1,0) \notin A$ et $(0,2) \notin A$.

RÉPONSE : Faux

1,5 pts d) Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ appartiennent à un espace vectoriel $V$ alors $\mathcal{L}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} = \mathcal{L}\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{v}\}$.

On a
$$\left.\begin{array}{l} U = 1.(U-V) + 1.V \Rightarrow U \in \mathcal{L}\{U-V, V\} \\ V = 0.(U-V) + 1.V \Rightarrow V \in \mathcal{L}\{U-V, V\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\{U,V\} \subset \mathcal{L}\{U-V,V\}$$

D'autre part,
$$\left.\begin{array}{l} U-V = 1U+(-1)V \Rightarrow U-V \in \mathcal{L}\{U,V\} \\ V = 0U + 1.V \Rightarrow V \in \mathcal{L}\{U,V\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\{U-V,V\} \subset \mathcal{L}\{U,V\}$$

d'où $\mathcal{L}\{U,V\} = \mathcal{L}\{U-V,V\}$

RÉPONSE : Vrai

**7.** [Bonus] Étant donné l'ensemble $U = \{(x+3, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et les opérations *non-standard* suivantes

$$(x,\ y) \oplus (x',\ y') = (x + x' - 3,\ y + y') \quad \text{(addition vectorielle)}$$

$$k \odot (x,\ y) = (kx - 3k + 3,\ ky) \quad \text{(multiplication par scalaires).}$$

1,5 pts a) Prouvez que $U$ est fermé pour la multiplication des scalaires $\odot$ définie ci-dessus.

1,5 pts b) Démontrez que $U$ *admet* un vecteur nul. (i.e. touvez-le et démontrez qu'il fonctionne.).

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow (x+3, x) \in U$.

$k \odot (x+3, x) = (k(x+3) - 3k + 3,\ kx)$

$= (kx + 3k - 3k + 3,\ kx)$

$= (kx + 3,\ kx) \in U$

d'où $U$ est fermé pour la multiplication des scalaires $\odot$.

b) Le vecteur nul de $U$ est $(3, 0)$ et on a :

$\forall\ (x+3, x) \in U$,

$(x+3, x) \oplus (3, 0) = (x + 3 + 3 - 3,\ x + 0)$

$= (x+3, x)$