Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistiques

MAT 1702C: Méthodes Mathematiques II

Professeur: Abdelkrim El basraoui

Examen Partiel I – Version A

10/10/2013

Nom ______________________ Prénon ______________________

d'étudiant ______________________

Instructions: (Lisez-les attentivement S.V.P.)

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant en haut de chaque page détachée dans l'espace précisé, s'il y a lieu.
- La durée de cet examen est de 80 minutes.
- Cet examen est un examen à livre fermé qui comporte **6 questions**.
- Utilisez l'espace spécifié pour répondre à chacune des questions. Si jamais l'espace ne vous suffit pas ou que vous utilisez l'endos de la page veuillez indiquer clairement où se trouve votre réponse ainsi que la suite du développement, s'il y a lieu.
- Vous devez justifier vos réponses.
- Les calculatrices ne sont pas permises.
- Vous avez une page supplémentaire à la fin que vous pouvez utiliser comme feuille de brouillon.

Bonne chance!

N'inscrivez rien dans la table suivante S.V.P.

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Maximum	3	4	2	4	2	5	20
Note							

1. **(3 points)** Déterminez si l'équation vectorielle suivante

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

est compatible ou incompatible. S'elle est compatible, trouvez la solution générale.

Solution:

Il faudra échelonner et réduire la matrice augmentée suivante: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right]$

On a

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{L_3 \to L_3 - L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{3}L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ est la M.E.R.}$$

Le système est donc compatible avec x_2 et x_4 étant les variables libres et x_1 et x_3 sont les variables de base. La solution générale est donc $\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 + 2x_2 \\ x_2 = \text{libre} \\ x_3 = 2x_4 + 1 \\ x_4 = \text{libre} \end{cases}$

2. **(4 points)** Déterminez si le système linéaire suivant est compatible ou incompatible. S'il est compatible, trouvez la solution générale.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 12 \end{cases}$$

Solution:

Il faudra échelonner et réduire la matrice augmentée suivante:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right]$$

On a $A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_3 \to L_3 - 5L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1}}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_2}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Le système est donc compatible. Les variables x_1, x_3 sont les variables de base et x_2, x_4 sont libres. La solution générale est donc $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 + 4 \\ x_2 = \text{libre} \\ x_3 = 2x_4 + 1 \\ x_4 = \text{libre} \end{cases}$

3. **(2 points)** Trouvez **toutes les valeurs** de h pour lesquelles le système suivant admet une solution unique.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ -9x_1 & + & hx_2 & = & 8 \end{array}\right.$$

Solution:

On doit chercher la M.E. de la M.A. suivante. On a

$$A = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ -9 & h & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 9L_1}$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & h+9 & 71 \end{array}\right]$$

Donc pour une solution unique il faudrait que $h+9$ soit un pivot et donc $h \neq -9$.

4. **(4 points)** Soient les vecteurs
$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}, \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \overrightarrow{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix}$. Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix}4\\3\\1\\2\end{bmatrix}$ appartient à $\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$? Justifiez votre réponse.

Solution:

On doit échelonner la M.A. suivante

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 2L_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \to L_4 + L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \to L_4 - L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to (-1)L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{L_2 \to L_2 - L_3 \\ L_1 \to L_1 - 2L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Puisque le système correspondant est compatible il en résulte que $\overrightarrow{b} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$.

5. **(2 points)** Trouvez **toutes les valeurs** de h pour lesquelles les vecteurs suivants sont **linéairement indépendants**.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ h \end{bmatrix}.$$

Solution:

On doit trouver la M.E. de la M.A. suivante (correspondante au système homogène $[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3 | \vec{0}]$). On a $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & h \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1}}$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & h-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2}$$

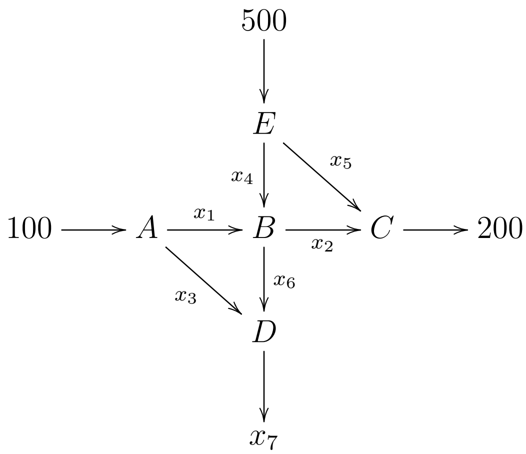
$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & h-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour que ces trois vecteurs soient linérairement indépendants il faudrait avoir trois pivots et donc $h-3$ devrait être un pivot, c-à-d.

quand $h \neq 3$.

6. **(5 points)** Considérez le réseau routier de la figure suivante. Les lettres A à E indiquent les intersections et les valeurs numériques indiquent le flux des voitures par minute. Les flêches indiquent la direction du flux. Nous supposons que la circulation ce fait en sens unique.



(a) Donnez le système linéaire représentant ce réseau.

Solution:
A: $100 = x_1 + x_3$
B: $x_1 + x_4 = x_2 + x_6$
C: $x_5 + x_2 = 200$
D: $x_3 + x_6 = x_7$
E: $500 = x_4 + x_5$
Total: $100 + 500 = 200 + x_7$

(b) La matrice échelonnée réduite de la matrice augmentée correspondante au ce système linéaire dans (a) est:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -300 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donnez la solution générale de ce systéme sous forme paramétrique.

Solution: x_5 et x_6 sont des variables libres; le restant des variables sont les variables de base. La solution générale est donc:

$$\begin{cases} x_1 = -300 + x_6 \\ x_2 = 200 - x_5 \\ x_3 = 400 - x_6 \\ x_4 = 500 - x_5 \\ x_5 = \text{libre} \\ x_6 = \text{libre} \\ x_7 = 400 \end{cases}$$

Sous forme paramétrique la solution s'écrit

$$\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 + t \\ 200 - s \\ 400 - t \\ 500 - s \\ s \\ t \\ 400 \end{bmatrix}$$

avec $x_5 = s \in \mathbb{R}$ et $x_6 = t \in \mathbb{R}$ (sont des paramètres).

(c) Si dû à des travaux le flux le long de la route EC est limité à un maximum de 50 voitures par minute, quel est le flux minimal le long de la route BC?

Solution:

(c) Comme $x_5 \leq 50$ et $x_2 = 200 - x_5$ on a $x_2 \geq 200 - 50 = 150$ est le flux maximal le long de BC.

Page supplémentaire pour brouillon.