MECA 357 Thermodynamique Appliquée

G. DEGREZ

Table des matières

1 Introduction **11**

1.1 Objet et plan du cours 11

1.2 La centrale thermique classique 12

1.3 La machine frigorifique à compression de vapeur 13

1.4 Observations 13

2 Concepts et définitions **15**

2.1 Sysème thermodynamique et volume de contrôle 15

2.2 Points de vue macroscopique et microscopique 16

2.3 Variables et états d'une substance 16

2.4 Transformations et cycles 17

2.5 Le volume massique 18

2.6 La pression 18

2.7 Egalité des températures 19

2.8 Le principe zéro de la thermodynamique 19

2.9 Les échelles de température 19

3 Propriétés des substances pures **21**

3.1 Substance pure 21

3.2 Equilibre des phases d'une substance pure 21

3.3 Variables indépendantes d'une substance pure 24

3.4 Equations d'état pour la phase vapeur d'une substance pure 25

3.5 Tables de variables thermodynamiques 26

3.6 Surfaces thermodynamiques 27

4 Travail et chaleur **29**

4.1 Définition du concept de travail 29

4.2 Travail à la frontière mobile d'un système contenant du fluide 30

4.3 Autres formes d'échange de travail 32

4.4 Remarques complémentaires sur le travail 32
4.5 Définition du concept de chaleur 33
4.6 Comparaison entre chaleur et travail 34

5 Le premier principe de la thermodynamique 35
5.1 Transformations fermées (cycles) d'un système fermé 35
5.2 Transformations ouvertes d'un système fermé 36
5.3 L'énergie interne 38
5.4 Analyse de problèmes 38
5.5 L'enthalpie 39
5.6 Les chaleurs massiques à volume constant et à pression constante 40
5.7 L'énergie interne, l'enthalpie et les chaleurs massiques des gaz parfaits 42
5.8 Le premier principe sous la forme d'une équation d'évolution temporelle 44
5.9 Conservation de la masse pour les systèmes ouverts 45
5.10 Le premier principe de la thermodynamique pour les systèmes ouverts 46
5.11 Les systèmes ouverts en régime permanent 48
5.12 La détente à travers une vanne et le coefficient de Joule-Thomson 49
5.13 Systèmes uniformes avec écoulement uniforme 50

6 Le second principe de la thermodynamique 51
6.1 Machines thermiques et réfrigérateurs 51
6.2 Le second principe de la thermodynamique 55
6.2.1 Equivalence des énoncés 55
6.2.2 Impossibilité des mouvements perpétuels 56
6.2.3 Classification et dégradation de l'énergie 56
6.3 Les transformations réversibles 56
6.4 Les sources d'irréversibilité 57
6.4.1 Les frottements 57
6.4.2 La détente libre 58
6.4.3 L'échange de chaleur entre deux sources 58
6.4.4 Autres sources d'irréversibilité 58
6.5 Le cycle de Carnot 59
6.6 Deux propriétés des cycles de Carnot 60
6.7 L'échelle de température thermodynamique 61

7 L'entropie **64**

7.1 L'inégalité de Clausius 64

7.2 L'entropie 65

7.3 L'entropie d'une substance pure 66

7.4 Les variations d'entropie au cours de transformations réversibles 67

7.4.1 Le cycle de Carnot 67

7.4.2 Le chauffage isobare 68

7.5 Deux relations thermodynamiques importantes 69

7.6 Transformations ouvertes irréversibles de systèmes fermés 70

7.7 Le travail non compensé 71

7.8 Le principe de l'accroissement de l'entropie 72

7.9 L'entropie d'un solide ou d'un liquide 73

7.10 L'entropie d'un gaz parfait 74

7.11 La transformation polytropique réversible d'un gaz parfait 75

7.12 Le second principe de la thermodynamique pour les systèmes ouverts 76

7.13 Les systèmes ouverts en régime permanent et les systèmes ouverts avec écoulement uniforme 77

7.14 Les transformations réversibles des systèmes ouverts en régime permanent . . . 78

7.15 Principe d'accroissement de l'entropie pour un système ouvert 79

7.16 Les rendements 81

7.16.1 Rendements des transformations adiabatiques 81

7.16.2 Rendements des transformations avec échange de chaleur 86

8 Irréversibilité et exergie **87**

8.1 Travail réversible et irréversibilité 87

8.1.1 Systèmes fermés 87

8.1.2 Systèmes ouverts en régime permanent 89

8.1.3 Cas général : transformations instationnaires des systèmes ouverts . . . 90

8.2 Exergie et rendement exergétique des systèmes ouverts stationnaires 91

9 Cycles moteurs **94**

9.1 Introduction 94

9.2 Le cycle de Rankine 96

9.3 Effet de la pression et de la température sur le cycle de Rankine 97

9.3.1 Effet de la pression de condenseur 97

9.3.2 Effet de la surchauffe 98

9.3.3 Effet de la pression maximale 98

9.4 Le cycle à resurchauffe . . . 99
9.5 Le cycle à soutirage . . . 99
9.6 Ecarts entre les cycles réels et les cycles idéaux . . . 101
9.6.1 Pertes en tuyauterie . . . 101
9.6.2 Pertes dans la turbine et dans la pompe . . . 101
9.6.3 Pertes dans le condenseur . . . 102
9.7 Les cycles théoriques à air . . . 102
9.8 Le cycle de Joule (Brayton) . . . 102
9.9 Le cycle de Joule à récupération . . . 105
9.10 Le cycle de Joule à compression et détente étagées, et récupération . . . 106
9.11 Le cycle du turboréacteur . . . 107
9.12 Le cycle d'Ericsson . . . 107
9.13 Le cycle de Stirling . . . 108
9.14 Le cycle d'Otto ou de Beau de Rochas . . . 110
9.15 Le cycle de Diesel . . . 112
9.16 Considérations additionnelles sur les cycles d'Otto et de Diesel . . . 113
9.16.1 Moteurs à quatre et à deux temps . . . 113
9.16.2 Cycles mixtes . . . 113
9.16.3 Moteurs suralimentés . . . 114

10 Cycles frigorifiques 115
10.1 Introduction . . . 115
10.2 Cycle frigorifique à compression de vapeur . . . 116
10.2.1 Performances . . . 116
10.2.2 Ecarts par rapport au cycle idéal . . . 118
10.3 Choix du fluide frigorigène . . . 118
10.4 Cycle frigorifique à absorption d'ammoniac . . . 120
10.4.1 Introduction . . . 120
10.4.2 Principe de fonctionnement . . . 121
10.5 Cycle frigorifique à air . . . 123

11 Relations thermodynamiques 126
11.1 L'équation de Clapeyron . . . 126
11.2 Rappels mathématiques . . . 127
11.3 Les relations de Maxwell . . . 128
11.4 Relations thermodynamiques additionnelles . . . 129
11.4.1 Energie interne et entropie dans le système $T - v$ . . . 129

11.4.2 Enthalpie et entropie dans le système $T - p$ 130
11.4.3 Relations concernant les chaleurs massiques 131
11.5 Coefficients de dilatation volumique et de compressibilité isotherme et adiabatique 131

12 Mélanges de gaz **133**
12.1 Généralités et mélanges de gaz parfaits 133
12.1.1 Première loi des mélanges 134
12.1.2 Deuxième loi des mélanges 134
12.1.3 Enthalpie d'un mélange 134
12.1.4 La pression partielle d'un constituant 134
12.1.5 Chaleurs massiques d'un mélange 135
12.1.6 Entropie d'un mélange 135
12.2 Modèle simplifié d'un mélange d'un gaz et d'une vapeur condensable 135
12.2.1 Généralités 135
12.2.2 L'humidité relative 136
12.2.3 L'humidité absolue 137
12.2.4 Remarques complémentaires 137
12.3 Transformations de l'air humide 137
12.3.1 Chauffage isobare 138
12.3.2 Mélange adiabatique 139
12.3.3 Assèchement par refroidissement 139
12.3.4 Saturation adiabatique 140
12.4 Le psychromètre 141
12.5 Le diagramme psychrométrique 141

13 Notions sur la combustion **143**
13.1 Les combustibles 143
13.2 Les réactions de combustion 145
13.2.1 Equations chimiques de combustion 145
13.2.2 Air théorique 146
13.3 L'enthalpie de formation 146
13.4 Analyse des systèmes réactifs à l'aide du premier principe 148
13.5 Température adiabatique de flamme 148
13.6 Enthalpie et énergie interne de combustion ; pouvoir calorifique 149
13.7 Le troisième principe de la thermodynamique et l'entropie absolue 150
13.8 Analyse des systèmes réactifs à l'aide du second principe 150
13.9 Evaluation des procédés réels de combustion 153

14 Ecoulements compressibles **154**
14.1 Variables totales ou d'arrêt . . . 154
14.2 Théorème de la résultante cinétique . . . 155
14.3 L'écoulement (quasi-)unidimensionnel stationnaire . . . 155
14.3.1 Conservation de la masse . . . 156
14.3.2 Théorème de la résultante cinétique . . . 156
14.3.3 Premier principe . . . 157
14.3.4 Second principe . . . 157
14.4 La vitesse du son et le nombre de Mach . . . 158
14.5 Equations des écoulements unidimensionnels de gaz parfaits en fonction du nombre de Mach . . . 159
14.6 Ecoulement unidimensionnel isentropique avec variation de section . . . 160
14.6.1 Effet de la variation de section . . . 160
14.6.2 Saturation . . . 161
14.6.3 Ecoulement de gaz parfait . . . 162
14.6.4 Ecoulement dans une tuyère de forme donnée . . . 164
14.7 Ecoulement unidimensionnel adiabatique avec frottement . . . 164
14.7.1 Effet du frottement . . . 164
14.7.2 Equations de la ligne de Fanno pour les gaz parfaits . . . 166
14.8 Ecoulement unidimensionnel avec échange de chaleur . . . 167
14.8.1 Effet de l'échange de chaleur . . . 167
14.8.2 Equations de la ligne de Rayleigh pour les gaz parfaits . . . 169
14.9 Ondes de choc normales . . . 170
14.9.1 Intersections d'une ligne de Fanno et d'une ligne de Rayleigh . . . 170
14.9.2 Conditions de saut : relations de Rankine-Hugoniot . . . 171
14.9.3 Relations de Rankine-Hugoniot pour les gaz parfaits . . . 172
14.9.4 Ecoulement avec choc dans une tuyère de Laval . . . 174

15 Notions sur les turbomachines **176**
15.1 Définition des turbomachines . . . 176
15.2 Classification des turbomachines . . . 177
15.3 Constitution des turbomachines . . . 178
15.4 Cinématique de l'écoulement rotorique — triangle des vitesses . . . 180
15.5 Mécanisme de l'échange d'énergie dans un rotor de turbomachine — Théorème du moment cinétique . . . 180
15.6 Application du premier principe à un rotor de turbomachine . . . 183
15.7 Illustrations : quelques exemples de turbomachines . . . 184
15.7.1 Ventilateur/soufflante axial(e) . . . 185
15.7.2 Turbine à vapeur/à gaz axiale . . . 185

Table des figures

1.1 La centrale thermique classique 12
1.2 La machine frigorifique à compression de vapeur 13

2.1 Système fermé 15
2.2 Frontière d'un système 16
2.3 Système fermé constitué du gaz contenu dans le cylindre 17

3.1 Equilibre des phases d'une substance pure 21
3.2 courbe de vaporisation 22
3.3 évolution de l'eau dans un diagramme température-volume 23
3.4 diagramme $p - T$ 24
3.5 diagramme de compressibilité de l'azote 25
3.6 diverses courbes isothermes sur chaque surface, ainsi que dans un diagramme p, v 27

4.1 concept de travail 30
4.2 concept de travail 2 30
4.3 dispositif cylindre/piston 31
4.4 la courbe de compression, représentée dans un diagramme $p - V$ 31
4.5 rupture d'une membrane séparant un volume de gaz d'un volume évacué . . . 32
4.6 dispositif avec poulie 33

5.1 Transformations fermées (cycles) d'un système fermé 35
5.2 Transformations ouvertes d'un système fermé 36
5.3 transformation quasi-statique isobare 39
5.4 le système fermé à volume constant auquel on fournit 100 kJ sous forme de chaleur, ou sous forme de travail 41
5.5 expérience de Joule 42
5.6 chaleur molaire à pression constante de divers gaz 44
5.7 système ouvert général 45
5.8 détente à travers une vanne 49

6.1 dispositif travail/chaleur 51

6.2 machine thermique . . . 52
6.3 machine thermique 2 : centrale thermique . . . 53
6.4 un système de réfrigération . . . 54
6.5 énoncé de Clausius et énoncé de Kelvin-Planck . . . 55
6.6 Impossibilité des mouvements perpétuels . . . 56
6.7 Transformation irréversible . . . 57
6.8 Transformation réversible . . . 57
6.9 La détente libre . . . 58
6.10 Le cycle de Carnot . . . 59
6.11 dispositif cylindre/piston . . . 60
6.12 violation la proposition de Kelvin-Planck . . . 60
6.13 cycles de Carnot moteurs entre 3 sources . . . 61
6.14 thermomètre à gaz à volume constant . . . 62
6.15 température thermodynamique . . . 63

7.1 machine thermique réversible . . . 64
7.2 deux cycles réversiblescomposés respectivement des transformations A et B, et A et C . . . 65
7.3 le diagramme $T - s$, appelé diagramme entropique ou diagramme de Stodola, et le diagramme $h - s$ appelé diagramme de Mollier . . . 67
7.4 diagramme entropique . . . 68
7.5 diagramme $T - s$ pour un chauffage isobare . . . 69
7.6 Transformations ouvertes irréversibles de systèmes fermés . . . 70
7.7 Le travail non compensé . . . 71
7.8 principe de l'accroissement de l'entropie . . . 72
7.9 centrale thermique à vapeur . . . 79
7.10 Principe d'accroissement de l'entropie pour un système ouvert . . . 80
7.11 rendement dans le cas d'une compression . . . 84
7.12 analyse pour le cas d'une détente dans un diagramme entropique . . . 85

8.1 L'application du concept d'exergie dans le cas de l'évolution dans un moteur à combustion interne . . . 92

9.1 travail massique réversible d'un système ouvert en régime . . . 95
9.2 Cyle moteur composé de 4 transformations de systèmes ouverts en régime . . . 95
9.3 Cycle idéal des centrales thermiques à vapeur d'eau représenté schématiquement dans un diagramme entropique . . . 96
9.4 Effet de la pression de condenseur . . . 97
9.5 Effet de la surchauffe . . . 98

9.6 Effet de la pression maximale . . . 98
9.7 Le cycle à resurchauffe . . . 99
9.8 Le cycle à soutirage . . . 99
9.9 Le cycle à soutirage 2 . . . 100
9.10 Pertes en tuyauterie . . . 101
9.11 Pertes dans la turbine et dans la pompe . . . 101
9.12 Le cycle de Joule (Brayton) . . . 103
9.13 dispositif cylindre/piston . . . 103
9.14 cycle de Joule 2 . . . 105
9.15 Le cycle de Joule à récupération . . . 105
9.16 Le cycle de Joule à compression et détente étagées, et récupération . . . 106
9.17 Le cycle du turboréacteur . . . 107
9.18 Le cycle d'Ericsson . . . 107
9.19 Le cycle de Stirling . . . 109
9.20 Transformation du cycle de Stirling . . . 109
9.21 Le cycle de Stirling . . . 110
9.22 Le cycle d'Otto . . . 110
9.23 Efficacité du cycle d'Otto . . . 111
9.24 Le cycle de Diesel . . . 112
9.25 Efficacité du cycle Diesel en fonction du rapport de compression pour différents rapports de combustion . . . 113

10.1 Cycles frigorifiques . . . 115
10.2 Cycle frigorifique à compression de vapeur . . . 116
10.3 Compresseur volumétrique de volume mort . . . 117
10.4 cycle frigo réel . . . 118
10.5 Efficacité frigorifique . . . 119
10.6 Cycle frigorifique à absorption d'ammoniac . . . 121
10.7 Cycle frigorifique à absorption d'ammoniac 2 . . . 122
10.8 dispositif cylindre/piston . . . 122
10.9 Cycle frigorifique à air . . . 123
10.10Courbes de COP . . . 124
10.11un cycle de Joule inverse à récupération . . . 124

12.1 le diagramme $T - s$ *de la vapeur* . . . 136
12.2 drefroidissement isobare d'un mélange gaz-vapeur . . . 137
12.3 Transformations de l'air humide : Chauffage isobare . . . 138

12.4 Transformations de l'air humide : Mélange adiabatique 139
12.5 Transformations de l'air humide : Assèchement par refroidissement 139
12.6 Transformations de l'air humide : Saturation adiabatique 140
12.7 Le psychromètre 141
12.8 Le diagramme psychrométrique 142

13.1 Les hydrocarbures 144
13.2 courbe de distillation de combustibles 144
13.3 Combustion de carbone solide avec de l'oxygène dans un système ouvert stationnaire 147

14.1 L'état d'arrêt isentropique se représente aisément sur un diagramme de Mollier 155
14.2 écoulement dans une canalisation droite de section variable $A(x)$ 156
14.3 La vitesse du son et le nombre de Mach 158
14.4 Ecoulement unidimensionnel isentropique avec variation de section 161
14.5 e nombre de Mach d'un écoulement subsonique augmente dans une tuyère convergente et celui d'un écoulement supersonique dans une tuyère divergente 163
14.6 Ecoulement dans une tuyère de forme donnée 164
14.7 La ligne de Fanno 165
14.8 La ligne de Rayleigh 169
14.9 Intersections d'une ligne de Fanno et d'une ligne de Rayleigh 170
14.10Courbe de Hugoniot 172
14.11Ecoulement avec choc dans une tuyère de Laval 175
14.12Ondes de choc obliques dans la tuyère 175

15.1 diagramme vectoriel dans ce plan : *triangle des vitesses* 180
15.2 Rotor de turbomachine 181

Chapitre 1

Introduction

1.1 Objet et plan du cours

Dans ce cours, on analysera le fonctionnement global d'appareils ou d'installations largement répandus dans la vie courante et industrielle, dont la caractéristique commune est d'être le siège d'échanges énergétiques, et qui peuvent donc être qualifiés de dispositifs de *conversion d'énergie*.

A titre d'exemple, et sans vouloir être exhaustif, on peut citer
- les centrales thermiques de production d'électricité,
- les moteurs à combustion interne,
- les turbopropulseurs et les turboréacteurs,
- les machines frigorifiques à compression de vapeur,
- ...

A cette fin, le cours sera organisé de la manière suivante :

I^{re}Partie Rappels de thermodynamique générale et extension aux systèmes ouverts
- Concepts et définitions
- Propriétés des substances pures
- Travail et chaleur
- Premier principe de la thermodynamique
- Deuxième principe de la thermodynamique
- Irréversibilité et exergie

II^{e}partie Cycles moteurs et frigorifiques
- Cycles moteurs
- Cycles frigorifiques

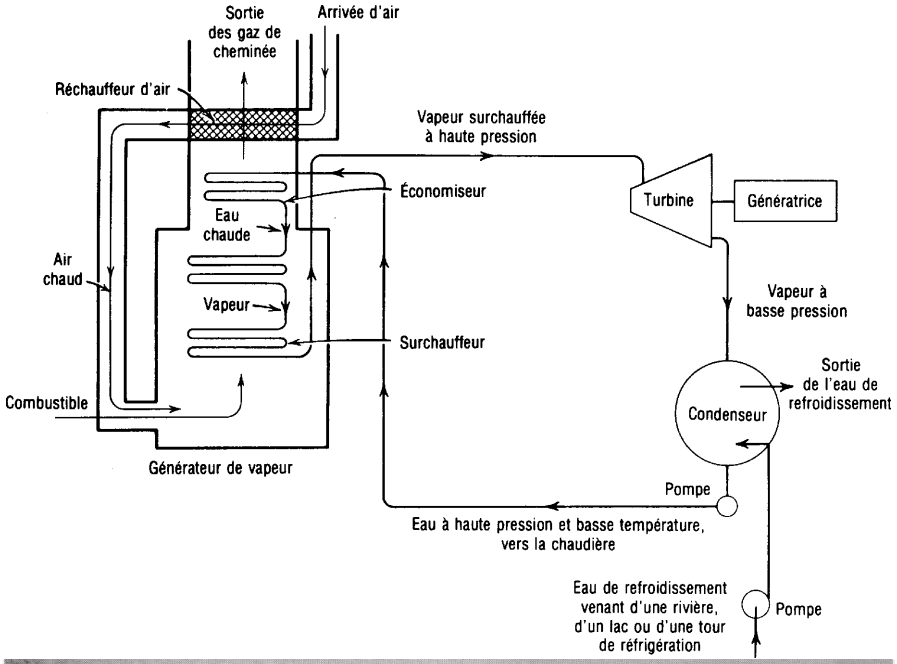
III^{e}partie Compléments
- Mélanges de gaz, l'air humide
- Notions sur la combustion
- Ecoulements dans les tuyères et sur les aubes

Documentation

- Transparents
- G. J. Van Wylen, R. E. Sonntag, P. Desrochers
  Thermodynamique appliquée
  Editions du Renouveau Pédagogique, Montréal
  ISBN 2-7613-0662-7
  Disponible aux PUB au prix de 52 Euros.
- site web The Expert System for Thermodynamics (http ://www.ulb.ac.be/sma/testcenter)

Afin de nous familiariser avec le sujet, commençons par décrire brièvement quelques exemples de dispositifs que l'on se propose d'analyser.

1.2 La centrale thermique classique



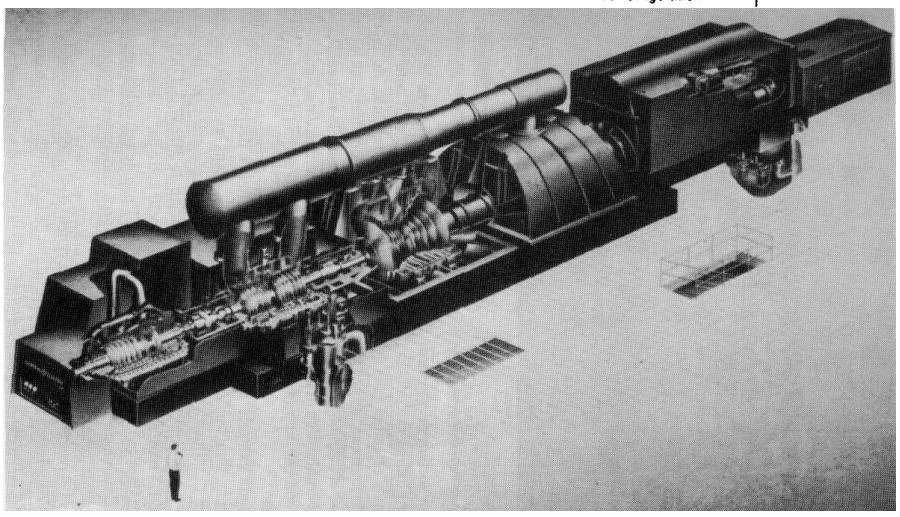


FIG. 1.1 – La centrale thermique classique

1.3 La machine frigorifique à compression de vapeur

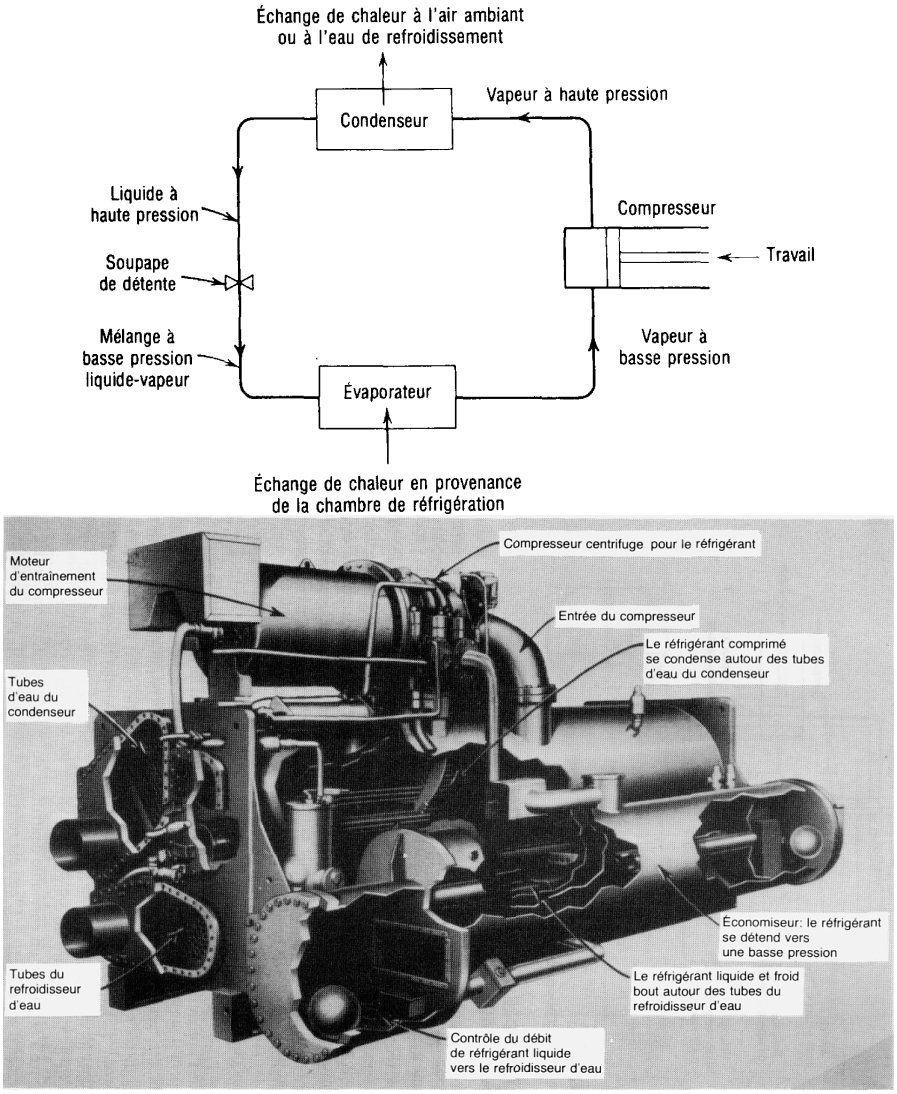


FIG. 1.2 – La machine frigorifique à compression de vapeur

1.4 Observations

Du bref examen des exemples précédents, on peut faire les observations suivantes :

- les installations décrites sont *cycliques* et font intervenir un *agent actif* (eau ou fluide frigorigène) qui subit des transformations *physiques* (chauffage, évaporation, condensation, compression ou détente) ; la nature de l'agent n'est pas modifiée ;
- ces transformations s'opèrent dans des composants de type divers, tels que
  - des *échangeurs de chaleur*, où n'intervient que la forme thermique de l'énergie ;
  - des *machines* réceptrices (pompes, compresseurs) ou motrices (turbines) où interviennent les formes thermique et mécanique de l'énergie ;
  - des vannes de détente, dans lesquelles n'intervient aucun échange d'énergie ;
- les composants de l'installation fonctionnent au contact d'éléments extérieurs (gaz brûlés, eau de refroidissement, moteur d'entraînement, alternateur) ;

– l'installation dans son ensemble est *motrice*, en ce sens que globalement, elle cède de l'énergie mécanique au monde extérieur (centrale thermique) ou *réceptrice* où au contraire elle reçoit globalement de l'énergie mécanique.

Outre les formes thermique et mécanique de l'énergie intervenant dans les exemples ci-dessous, les formes *chimique* et *électro-magnétique*, voire *nucléaire* peuvent être mises en jeu.

Dans ce cours, c'est toutefois essentiellement aux formes thermique et mécanique que l'on s'intéressera. Ce n'est qu'à l'occasion de l'étude des réactions de combustion que la forme chimique de l'énergie sera considérée.

Chapitre 2

Concepts et définitions

2.1 Sysème thermodynamique et volume de contrôle

Un *système thermodynamique* est une portion d'espace limitée par une surface fermée, encore appelé *volume de contrôle*, qui contient une certaine quantité de matière. Cette surface fermée, encore appelée *frontère* du système peut être fixe ou mobile. Tout ce qui est au-delà de la frontière est appelé *milieu extérieur*.

Lorsque la frontière du système est imperméable à la matière (étanche), le système est dit *fermé*.

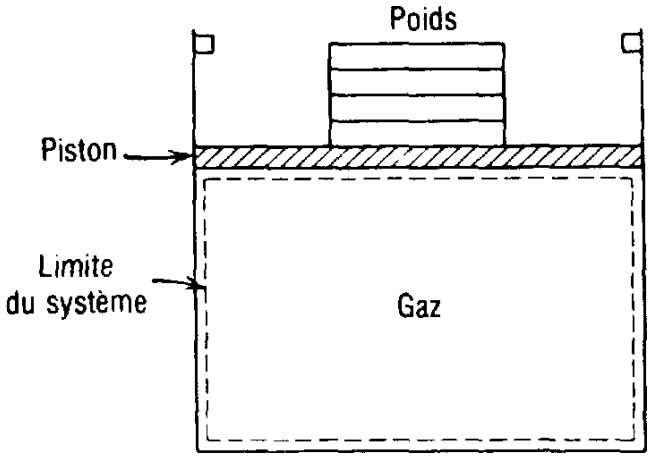


FIG. 2.1 – Système fermé

Un système qui non seulement est imperméable à la matière, mais en outre n'échange ni chaleur ni travail avec le milieu extérieur est dit *isolé*.

Lorsque la frontière d'un système (ou certaines portions de celle-ci) sont traversées par un débit de masse, le système est dit *ouvert*. On donne aux portions de la frontière traversées par un débit le nom de *sections d'entrée et de sortie*, selon que le sens du débit.

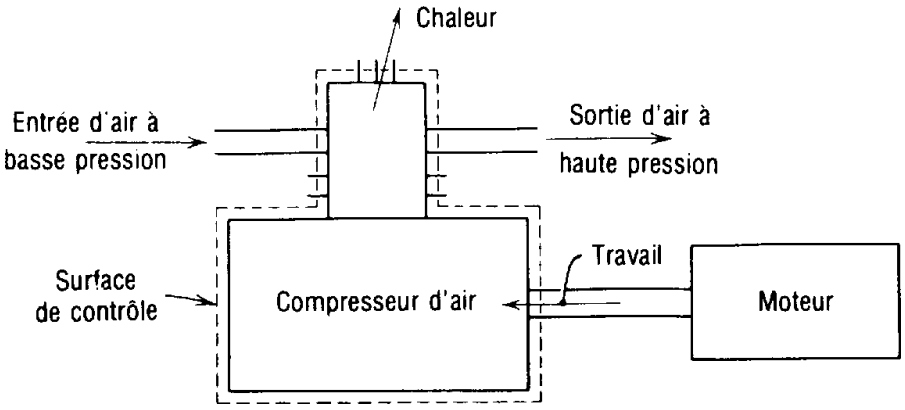


FIG. 2.2 – Frontière d'un système

2.2 Points de vue macroscopique et microscopique

Un système peut être décrit d'un point de vue *microscospique* ou *macroscopique*.

Le point de vue microscopique consiste à décrire le système comme un ensemble d'atomes et de molécules dont on cherche à connaître la position et la vitesse.

Comme le nombre d'atomes et de molécules dans un système de taille «humaine »(quelques mm à quelques dizaines voire centaines de m) est énorme (10^{20} atomes dans un cm^3 de gaz monoatomique aux conditions standard), cette approche est impraticable.

Une manière de résoudre cette difficulté est *l'approche statistique* ou probabiliste, qui cherche à déterminer une distribution de probabilité de présence d'un atome dans un état (position, vitesse) donné, à partir de laquelle on peut calculer des valeurs moyennes pour le système. C'est l'approche à la base de la *théorie cinétique* et de la mécanique statistique.

L'autre manière de résoudre cette difficulté est d'adopter le point de vue macroscopique, qui est celui de la *thermodynamique classique*, qui consiste à ne s'intéresser qu'aux manifestations globales de l'ensemble des atomes et molécules, telles qu'elles peuvent être mesurées par des senseurs.

Pour ce faire, les systèmes considérés doivent nécessairement comprendre un grand nombre d'atomes ou molécules.

Mais comme on vient de le voir, il suffit généralement d'un très faible volume pour contenir un très grand nombre d'entités microscopiques (10^{-11} cm^3 contiennent 10^9 atomes d'un gaz monoatomique aux conditions standard).

On peut dans ces conditions décrire la matière comme un *milieu continu*, dont les propriétés macroscopiques locales (propriétés d'une «particule »de matière, contenant un grand nombre d'entités microscopiques) sont des fonctions continues du temps et des coordonnées spatiales.

2.3 Variables et états d'une substance

On sait que les matières, l'eau par exemple, peuvent se présenter sous diverses formes, à savoir solide, liquide et gazeuse, chaque forme pouvant exister à différentes pressions et températures, que l'on désigne sous le nom d'*état* thermodynamique.

L'état thermodynamique d'une substance se caractérise par certaines variables macroscopiques observables telles que la pression, la température, la masse volumique, que l'on appelle *variables d'état*. Comme le nom l'indique, leur valeur ne dépend que de l'état de la substance, et non du processus qui l'a amené dans cet état.

Les variables d'état se divisent en deux catégories : les variables *intensives* et les variables *extensives*. Les variables intensives peuvent se définir en tout point d'un système (p, T), alors que les variables extensives ne sont définies que pour un système dans son entièreté (p. ex. m, V).

A chaque variable extensive, on peut faire correspondre une variable intensive massique (par unité de masse), volumique (par unité de volume) ou encore molaire.

Un système uniforme, et dont les variables restent constantes dans le temps est en *équilibre*. Toute variation des variables d'état en espace ou en temps implique donc un certain déséquilibre. Cependant, dans énormément de situations, l'écart à l'équilibre est tellement faible qu'il peut être négligé : c'est le concept d'équilibre thermodynamique local.

On se limitera dans ce cours à l'étude de systèmes à l'équilibre (local).

2.4 Transformations et cycles

Lorsqu'une ou plusieurs variables d'état d'un système sont modifiées, on dit que le système subit un *changement d'état*. La succession des états par lequel passe un système entre un état initial et un état final est appelée *transformation* ou *évolution du système*.

Considérons à nouveau le système fermé constitué du gaz contenu dans le cylindre représenté ci-dessous.

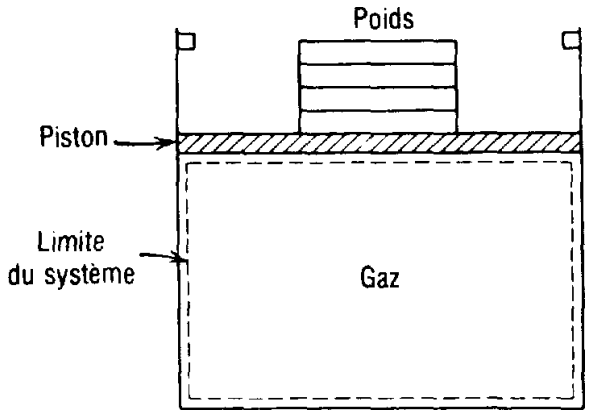


FIG. 2.3 – Système fermé constitué du gaz contenu dans le cylindre

Si l'on retire le poids sur le piston, l'équilibre mécanique est rompu et le piston va se soulever jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli. Il en résulte que les états intermédiaires entre l'état initial et l'état final sont nécessairement hors d'équilibre.

Cependant, dans les nombreux cas où la transformation est suffisamment lente, on peut admettre que les écarts entre les états intermédiaires et l'équilibre sont infinitésimaux. On dit alors que les états intermédiaires sont en *quasi-équilibre* et que la transformation est *quasi-statique*.

Si la transformation est trop rapide pour être considérée quasi-statique, alors la thermodynamique classique est impuissante à décrire les états intermédiaires. Néanmoins, pour autant que les états initial et final soient eux en équilibre, elle pourra quand même décrire certains effets globaux.

Certaines transformations se caractérisent par le fait qu'une variable d'état reste constante. On dénote cette caractéristiques par le préfixe «iso» : isotherme (température constante), isobare (pression constante), isochore (masse volumique constante).

Lorsqu'au cours d'une transformation, un système retourne finalement à son état initial après être passé par une succession d'états intermédiaires distincts, la transformation est appelée *cycle*. Ainsi, dans la centrale électrique considérée dans l'introduction, la vapeur d'eau décrit un cycle.

Au contraire, si l'état final diffère de l'état initial, on parle de *transformation ouverte*.

2.5 Le volume massique

Pour un système uniforme, le volume massique, noté v est simplement

$$v = \frac{V}{m} \tag{2.1}$$

Pour un système non-uniforme, le volume massique en un point P est défini par la relation

$$v = \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta V}{\delta m} \tag{2.2}$$

où δm est la masse contenue dans un volume δV autour du point P et $\delta V'$ est le volume minimal pour que le point de vue macroscopique reste valable.

Semblablement, on définit le volume molaire $\bar{v}$[1] par la relation

$$\bar{v} = \lim_{\delta V \to \delta V'} \frac{\delta V}{\delta n} \tag{2.3}$$

où δn est le nombre de moles contenues dans δV.

La masse volumique, notée ρ est l'inverse du volume massique.

2.6 La pression

Considérons un point P situé sur la surface S d'un volume contenant un fluide. En raison de l'agitation moléculaire (mouvement brownien), le fluide à l'intérieur du volume exerce une force sur le milieu extérieur. Notons $\delta\vec{F}$ la force exercée sur un élément de surface d'aire $\delta\mathcal{A}$. Dans un fluide au repos, cette force est normale à l'élément de surface, et La pression p du fluide est alors définie par la relation

$$p = \lim_{\delta \mathcal{A} \to \delta \mathcal{A}'} \frac{\delta F}{\delta \mathcal{A}} \tag{2.4}$$

[1] On identifie les grandeurs molaires en les surmontant d'un tiret.

où δF est le module de la force $\delta\vec{F}$, et $\delta\mathcal{A}'$ est la plus petite aire pour laquelle le point de vue macroscopique reste valable.

Dans un fluide visqueux en mouvement, la force de surface cesse d'être purement normale (voir cours de Mécanique des milieux continus). Pour les applications traitées dans ce cours, on pourra négliger les effets de viscosité, et considérer le fluide comme parfait, c'est-à-dire non visqueux. Dans ces conditions, la définition (2.4) reste valable.

En thermodynamique, la pression qu'il faut considérer est la pression absolue (par rapport au vide). Cependant, la plupart des jauges de pression (manomètres, capteurs) mesurent une pression relative, par rapport à une pression de référence, généralement la pression atmosphérique. Il ne faut donc pas oublier d'ajouter cette pression de référence à la pression indiquée par la jauge pour les calculs thermodynamiques.

2.7 Egalité des températures

Bien que la température soit une notion familière, sa définition précise est loin d'être évidente. Ainsi, la sensation de chaleur perçue au contact d'un objet ne dépend pas seulement de sa température, mais aussi de la nature du matériau.

Il est plus simple dans un premier temps de définir *l'égalité des températures*. Si l'on met en contact deux corps de température différente, alors on constate une variation de certaines de leurs propriétés observables (dimension, résistance électrique, indice de réfraction) jusqu'à ce qu'un état d'équilibre appelé *équilibre thermique* soit atteint.

On dira donc que deux corps ont la même température si aucune variation de leurs propriétés observables ne se produit lorsqu'ils sont mis en contact, et donc qu'ils sont en équilibre thermique.

2.8 Le principe zéro de la thermodynamique

Le principe zéro de la thermodynamique, qui est fondé sur l'expérience et a été formalisé par A. Sommerfeld (1956), postule que deux corps en équilibre thermique avec un troisième sont aussi en équilibre thermique entre eux.

C'est ce principe qui est à la base de la mesure de la température, puisque, chaque fois qu'un corps est en équilibre avec un thermomètre, sa température est indiquée par la graduation du thermomètre.

2.9 Les échelles de température

Il est expérimentalement assez simple de réaliser des systèmes dont la température est toujours la même, que l'on appelle *points fixes*. C'est le cas par exemple d'un mélange d'eau et de glace à la pression atmosphérique, ou encore d'eau bouillante en équilibre avec de la vapeur d'eau.

En associant des nombres à ces points fixes, on peut alors définir une échelle de température. Ainsi, l'échelle centigrade encore appelée échelle Celsius, associe conventionnellement les valeurs 0 et 100 aux deux points fixes définis ci-dessus. L'intervalle de température est alors divisé

en cent parties égales, que l'on appelle *degré centigrade*. L'échelle ainsi définie est purement empirique puisqu'elle dépend du choix des points fixes et que l'interpolation entre les points fixes dépend du thermomètre utilisé. Une échelle internationale pratique de température a été définie de cette manière (voir Van Wylen et al., 2.11).

Outre de telles échelles empiriques, on verra qu'il est possible de définir, à partir des principes de la thermodynamique, une échelle de température indépendante des propriétés d'un thermomètre particulier. On donne à cette échelle absolue le nom d'*échelle de température thermodynamique*.

Chapitre 3

Propriétés des substances pures

On se propose dans ce chapitre d'étudier les propriétés thermodynamiques des substances pures, notamment en fonction des phases sous lesquelles elle peuvent exister, ainsi que le nombre de variables indépendantes qui définissent son état.

3.1 Substance pure

Une substance pure est une substance de composition chimique homogène et stable.
- L'eau liquide, un mélange eau/glace ou eau/vapeur sont des substances pures ;
- un mélange de gaz, tel que l'air, n'est pas à proprement parler une substance pure. Cependant, en l'absence de réactions chimiques (à haute température) et de changement de phase (à basse température), sa composition chimique est uniforme et constante dans le temps. Dans ces conditions, il se comporte comme une substance pure, de sorte qu'on pourrait utiliser le terme de *substance pseudo-pure*.

3.2 Equilibre des phases d'une substance pure

Soit le système constitué de la masse d'1 kg d'eau (liquide) contenue dans le dispositif cylindre-piston représenté ci-dessous. La température initiale est de 20 °C et la pression maintenant le piston et les poids en équilibre est de 0,1 MPa.

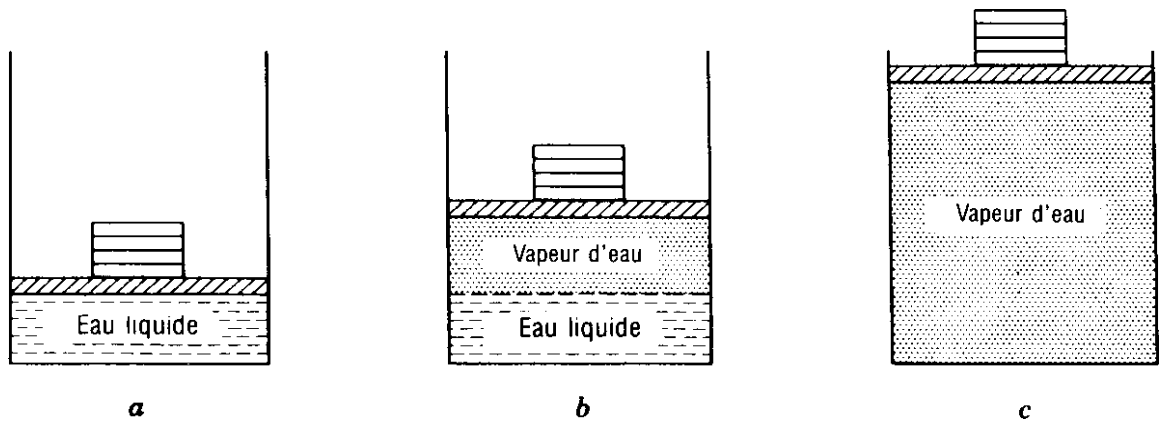


FIG. 3.1 – Equilibre des phases d'une substance pure

On chauffe l'eau, sa température s'élève (sans changement de volume appréciable). Lorsque la température atteint 99,6 °C, tout nouvel apport de chaleur entraîne la vaporisation d'une certaine quantité d'eau (b). Pendant cette transformation, la pression et la température restent constantes, alors que le volume augmente considérablement. Lorsque tout le liquide a disparu, tout nouvel apport de chaleur s'accompagne d'une augmentation de volume et de température (c).

On appelle *température de saturation* la température à laquelle la vaporisation se produit pour une pression donnée. Semblablement, cette même pression est appelée *pression de saturation* pour la température donnée. Pression et température de saturation sont donc liées par une relation fonctionnelle, que l'on appelle *courbe de vaporisation*.

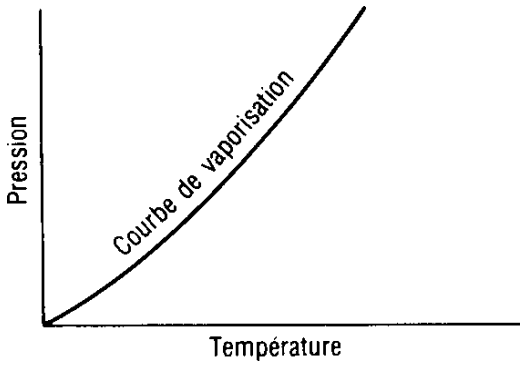


FIG. 3.2 – courbe de vaporisation

- Lorsqu'une substance est à l'état liquide dans des conditions (p, T) de saturation, on la désigne sous le nom de *liquide saturé*.
- Une substance à l'état liquide à une température inférieure à la température de saturation à la pression donnée (et par conséquent à une pression supérieure à la pression de saturation à la température donnée) est appelée *liquide refroidi ou comprimé*.
- Lorsqu'une substance est à en partie sous forme liquide et en partie sous forme de vapeur (mélange liquide/vapeur, cas (b)), on définit le *titre en vapeur* ou simplement titre comme le rapport de la masse de vapeur à la masse totale $x = m_v/m$.
  On peut le considérer comme une variable intensive. Il n'est défini que lorsque la substance est dans un état saturé.
- Lorsqu'une substance est à l'état de vapeur dans des conditions de saturation, on la désigne sous le nom de *vapeur saturée*.
- Une substance à l'état de vapeur à une température supérieure à la température de saturation est appelée *vapeur surchauffée*.

Portons à présent l'évolution de l'eau dans un diagramme température-volume

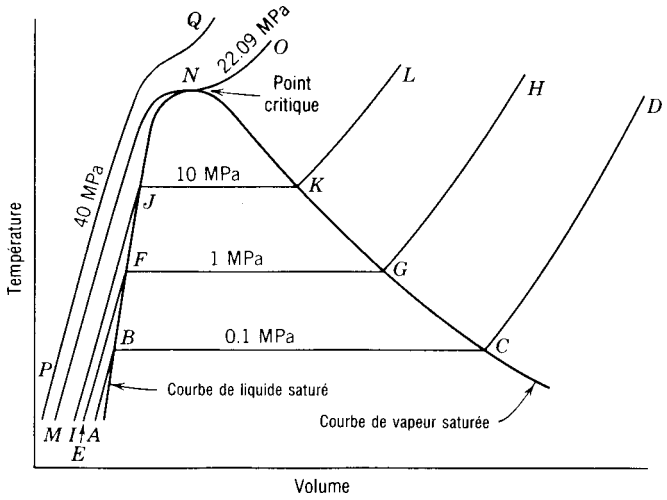


FIG. 3.3 – évolution de l'eau dans un diagramme température-volume

Les différentes étapes de la transformation décrite précédemment apparaissent clairement sur le diagramme :

Chauffage de l'eau représenté par la ligne AB : élévation de température, accompagnée d'une faible augmentation de volume massique ;

Vaporisation représenté par la ligne BC : augmentation du volume massique (dé à l'augmentation du titre en vapeur) à température constante (température de saturation) ;

Chauffage de la vapeur représenté par la ligne CD : augmentation concomitante de la température et du volume massique.

Si l'on répète l'expérience à une pression de 1 MPa, on décrit la courbe semblable $EFGH$:
- le point de départ E est légèrement à gauche du point A (volume massique légèrement plus faible en raison de la pression plus élevée) ;
- la température d'ébullition (température du palier FG) est plus élevée (179,9 °C).

Mais, à la pression de 22,09 MPa, le comportement est différent : l'étape de vaporisation à température constante a disparu, le point N étant simplement un point d'inflexion à pente nulle de la courbe MNO : c'est *le point critique*. Les conditions au point critique sont identifiées par l'indice c.

Au delà de la pression critique (courbe PQ à 40 MPa), l'évolution de la température est continue et une seule phase est présente en chaque point : on ne peut plus distinguer liquide et vapeur, on parle simplement de *fluide*.

Si on répète l'expérience initiale (c.-à-d. à $p = 0,1$ MPa), mais en partant de glace à -20 °C, on a d'abord élévation de température de la glace (avec faible augmentation de volume) jusqu'à 0 °C, puis fusion de la glace[1] et enfin élévation de température de l'eau (avec faible augmentation de volume) jusqu'à la température de vaporisation.

Mais en partant de glace à 0,26 kPa, sa température s'élève jusqu'à -10 °C, à laquelle elle passe directement à l'état vapeur. Ce processus est nommé *sublimation*.

Il doit donc exister une pression qui marque la frontière entre les processus de fusion puis évaporation et le processus de sublimation. Pour l'eau, cette pression vaut 0,6113 kPa et les températures de fusion, d'évaporation et de sublimation coïncident et valent 0,01 °C. Ce point

[1]Pour l'eau, contrairement à la plupart des substances, la fusion d'accompagne d'une *diminution* du volume massique.

est appelé *point triple* car en ce point peuvent exister les trois phases (solide, liquide, vapeur) en équilibre.

Ces divers processus sont clairement visualisés dans le diagramme $p - T$ suivant (qui est une extension du diagramme de vaporisation présenté précédemment)

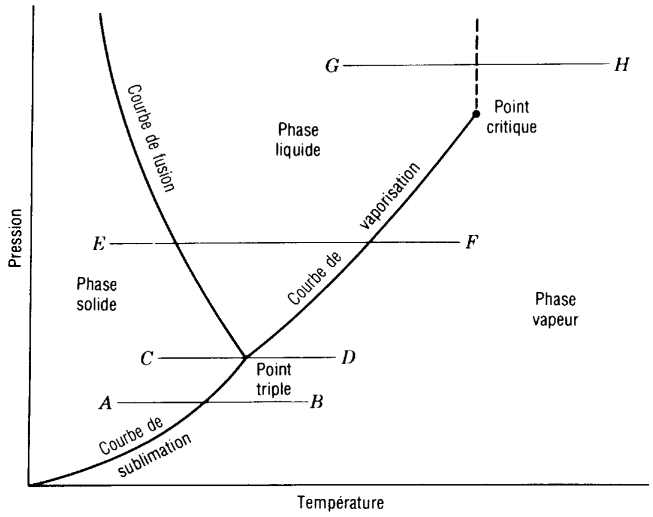


FIG. 3.4 – diagramme $p - T$

Toutes les substances pures ont un comportement semblable, mais les conditions critiques et les conditions au point triple varient grandement d'une substance à l'autre (voir Van Wylen et al.).

Pour être complet, mentionnons qu'une substance pure peut exister sous plusieurs phases solides (qui diffèrent par leur structure cristallographique). Un changement de phase d'une phase solide à une autre est appelé *transformation allotropique*.

Il existe alors plusieurs points triples de coexistence de trois phases. Mais un seul correspond à l'équilibre solide-liquide vapeur.

3.3 Variables indépendantes d'une substance pure

Les substances pures ont (en l'absence de mouvement, d'effets de pesanteur et d'effets superficiels, électriques ou magnétiques) la propriété que leur état est entièrement défini par *deux* variables indépendantes.

Donc, si on connaît par exemple température et volume massique, on peut déterminer la pression (ainsi que toutes les autres variables qui seront introduites ultérieurement — voir exercices).

Remarquons que sur les courbes de changement de phase (vaporisation, fusion, sublimation), p et T ne sont pas indépendantes. Un état saturé ne peut donc pas être défini par le couple p, T, mais doit plutôt être défini par le couple p, x (ou T, x) ou encore par le couple p, v (ou T, v).

L'état d'un mélange de composition fixée (absence de réactions chimiques) et présent sous une seule phase, tel que l'air sous forme gazeuse, est aussi entièrement déterminé par deux variables indépendantes. C'est pourquoi il se comporte comme une substance pure.

3.4 Equations d'état pour la phase vapeur d'une substance pure

Pour les vapeurs (gaz), on a constaté que, aux faibles masses volumiques, la relation entre pression, température et volume molaire prenait la forme simple

$$p\bar{v} = \bar{R}T \tag{3.1}$$

où $\bar{R}$ est la constante universelle des gaz

$$\bar{R} = 8,3144\,\mathrm{kJ\,kmole^{-1}\,K^{-1}}$$

En divisant par la masse molaire, on obtient la forme massique

$$pv = RT \tag{3.2}$$

où R est la constante massique du gaz $R = \bar{R}/M$.

Pour un système uniforme, en exprimant les volumes molaire et massique en fonction des variables extensives V, m et n, on déduit les relations

$$\begin{aligned} pV &= n\bar{R}T \\ pV &= mRT \end{aligned} \tag{3.3}$$

Comme on l'a mentionné, cette loi ne s'applique que pour les faibles masses volumiques (on peut d'ailleurs l'obtenir théoriquement par la théorie cinétique des gaz en supposant les forces intermoléculaires négligeables). On peut évaluer sa validité en fonction des conditions de pression et température en définissant le facteur de compressibilité

$$Z = \frac{p\bar{v}}{\bar{R}T} \tag{3.4}$$

dont l'écart avec l'unité représente l'importance de la déviation entre le comportement réel et la loi des gaz parfaits (3.1).

Examinons, à titre d'exemple, le diagramme de compressibilité de l'azote :

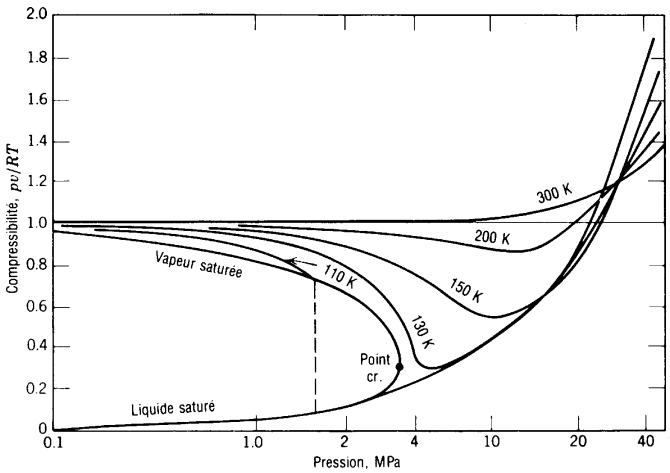


FIG. 3.5 – diagramme de compressibilité de l'azote

Observations :
- Quelle que soit T, $Z \to 1$ lorsque $p \to 0$. Pour les températures ambiantes et plus élevées, $Z \approx 1$ pour $p \leq 10$ MPa.
- Pour une pression de 4 MPa (légèrement supérieure à la pression critique de l'azote, égale à 3,39 MPa), Z diminue lorsque la température diminue. A ces densités, les molécules sont assez proches pour que les forces d'attraction intermoléculaires prennent de l'importance. Elles ont pour effet de rapprocher davantage les molécules, et donc d'augmenter la masse volumique (par rapport au comportement de gaz parfait).
- Au contraire, aux très hautes pressions ($p > 30$ MPa), on constate une masse volumique inférieure à celle donnée par la loi des gaz. C'est dé au fait que les distances intermoléculaires sont tellement faibles que les forces intermoléculaires deviennent répulsives.

Le comportement des autres gaz est semblable à celui de l'azote. En réalité, on constate que si on porte le diagramme en pressions et températures réduites (en divisant pressions et températures par leur valeur au point critique), les diagrammes de bon nombre de gaz sont quasiment confondus. Ceci conduit à définir un *diagramme de compressibilité généralisé* valable pour tous les gaz.

Plutôt que de représenter le comportement des gaz réels par le diagramme de compressibilité, on peut (tenter de) le décrire par une équation d'état. Plusieurs ont été proposées. Citons, à titre d'exemple

Equation de Van der Waals

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = RT$$

Equation du viriel

$$Z = 1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2}$$

Equation de Redlich-Kwong

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{\sqrt{T}v(v + b)}$$

3.5 Tables de variables thermodynamiques

Pour analyser les dispositifs dont l'étude est l'objet de ce cours, on aura à calculer les propriétés thermodynamiques de diverses substances. Si l'on dispose d'un calculateur, on peut employer des équations d'état telles que celles que l'on vient de présenter. C'est ce qui est réalisé par les applets du site "The Expert System for Thermodynamics" (TEST center) notamment.

Sinon, on peut utiliser des tables ou des diagrammes thermodynamiques, qui fournissent un ensemble de valeurs calculées à l'aide de telles équations d'état. De telles tables sont disponibles pour de nombreuses substances d'usage répandu, et se présentent toutes de la même manière.

Comme cette année on utilisera encore largement les tables aux exercices, présentons brièvement la manière dont elles se présentent, pour le cas particulier de la vapeur d'eau[2].

Les tables se présentent en trois (ou quatre) parties :
- une table de propriétés d'un mélange saturé en fonction de la température : pour chaque température sont fournies la pression de saturation correspondante, ainsi que les propriétés de la phase liquide et de la phase gazeuse, p. ex. v_l et v_g ;

[2]L'importance pratique de l'eau et de la vapeur d'eau comme fluide actif est telle qu'il existe une organisation internationale dont l'objet est l'étude et la publication des propriétés de l'eau

– une table de propriétés d'un mélange saturé en fonction de la pression, qui inclut la pression de saturation correspondante et les propriétés des deux phases ;
– une table de propriétés de la vapeur surchauffée (en fonction de p et T) ;
– une table de propriétés du liquide comprimé.

Ces deux dernières tables sont parfois combinées en une seule. Il s'y ajoute parfois une table du mélange saturé solide/vapeur (courbe de sublimation).

Pour un état saturé (mélange liquide/vapeur), le volume massique du mélange s'obtient en remarquant que le volume du mélange est la somme des volumes de chaque phase. On a donc

$$V = mv = V_l + V_g = m_l v_l + m_g v_g$$

On en déduit en divisant par m et compte tenu de la définition du titre en vapeur et de la relation $m = m_l + m_v$,

$$v = (1 - x)v_l + xv_g = v_l + x(v_g - v_l) \tag{3.5}$$

En inversant cette dernière relation, on peut déduire le titre lorsqu'on connaît le volume massique du mélange :

$$x = \frac{v - v_l}{v_g - v_l}$$

3.6 Surfaces thermodynamiques

Comme l'état d'une substance pure dépend de deux variables indépendantes, il en résulte que l'ensemble des états d'équilibre possibles décrivent une surface dans un espace p, v, T, qui donne une excellente vue d'ensemble sur le sujet de ce chapitre.

Deux surfaces de ce type sont représentées ci-après, l'une pour une substance telle que l'eau dont le volume massique diminue en passant de l'état solide à l'état liquide, et l'autre pour une substance dont le volume massique augmente dans la même situation (cas le plus fréquent).

Là où une seule phase est présente, la surface est incurvée, alors que dans les régions correspondant à des mélanges, la surface est réglée, c.-à-d. constituées de droites, en l'occurrence parallèle à l'axe du volume massique puisque pression et température restent constantes lors d'un changement de phase.

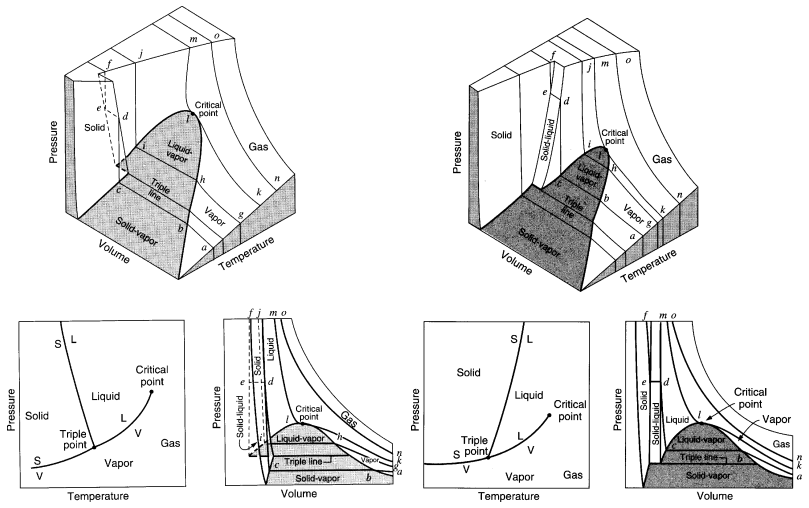


FIG. 3.6 – diverses courbes isothermes sur chaque surface, ainsi que dans un diagramme p, v

On a représenté diverses courbes isothermes sur chaque surface, ainsi que dans un diagramme p, v.

On peut remarquer que, pour une substance qui se dilate en se solidifiant telle que l'eau, la température de fusion diminue avec la pression. En augmentant la pression à température constante (inférieure à la température du point triple), elle commence donc par devenir solide, et puis liquide.

Au contraire, pour une substance qui se contracte en se solidifiant, en suivant une isotherme (de température supérieure à la température du point triple), elle devient d'abord liquide, puis solide lorsqu'on augmente la pression.

Chapitre 4

Travail et chaleur

On présente dans ce chapitre les concepts de travail et de chaleur, qui sont centraux pour l'analyse des problèmes thermodynamiques.

4.1 Définition du concept de travail

En mécanique rationnelle, on a défini le travail comme le produit (scalaire) d'une force par un déplacement. Si un point matériel se déplace le long d'une courbe 1-2 dans un champ de force $\vec{F}$,

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \tag{4.1}$$

Semblablement, si on exerce une force de traction pour étirer un fil métallique ou un ressort, on emploiera la même expression pour calculer le travail effectué.

On va maintenant étendre ce concept de manière à ce qu'il puisse être utilisé pour l'étude des systèmes thermodynamiques. Il s'agit en effet de définir le travail reçu par un système.

> Un système échange du travail avec le milieu extérieur lorsque l'action du système sur le milieu extérieur peut se réduire au déplacement d'une masse dans le champ de la pesanteur

Remarques

- Il n'est pas du tout nécessaire que le système déplace effectivement un poids, simplement que son action soit *équivalente* au déplacement d'un poids.
- Contrairement à Van Wylen et al., on adoptera la convention traditionnelle en Europe de compter comme positif le travail *reçu* par un système. Pour désigner le travail fourni par un système (qui est l'effet utile d'un système moteur), on utilisera la notation W^* ($W^* = -W$).

Illustrations

FIG. 4.1 – concept de travail

On remplace le ventilateur par une poulie à laquelle est suspendue un poids.

Lorsque le moteur tourne, son seul effet est de déplacer verticalement le poids, il y a donc échange de travail avec le milieu extérieur, dont la valeur est $W = -Ph \Rightarrow W^* = Ph$ où P

– Comme la compression de 1 à 2 peut se faire de multiples manières différentes, et puisque l'aire sous la courbe dépend de la courbe de compression suivie, on en déduit que le travail dépend non seulement des états initial et final, *mais aussi du chemin parcouru entre ces états*.
Au contraire, la variation de volume entre 1 et 2 est indépendante du chemin parcouru. Mathématiquement, cela correspond au fait que $\mathrm{d}V$ est une différentielle exacte, alors que $\delta W = -p\mathrm{d}V$ ne l'est pas. Thermodynamiquement, cela correspond au fait que le volume est une variable d'état, alors que le travail ne l'est pas.

4.3 Autres formes d'échange de travail

On rencontre évidemment bien d'autres formes d'échange de travail. Voici à titre d'exemple quelques transformations quasi-statiques et l'expression du travail correspondant.

Traction d'un fil métallique $\delta W = \mathcal{T}\mathrm{d}L$, où $\mathcal{T}$ est la traction dans le fil ;

Etirement d'un film liquide $\delta W = \mathcal{S}\mathrm{d}\mathcal{A}$, où $\mathcal{S}$ est la tension superficielle dans le film, et $\mathcal{A}$ la surface du film ;

Charge d'un condensateur $\delta W = \mathcal{E}\mathrm{d}Z$, où $\mathcal{E}$ est la différence de potentiel aux bornes du condensateur et Z sa charge.

4.4 Remarques complémentaires sur le travail

Tout comme celle du travail reçu par un volume de fluide, on constate que les expressions précédentes sont chaque fois de la forme variable intensive multipliée par la variation d'une variable extensive correspondante, la variable intensive pouvant être considérée comme la « force »à l'origine de la variation de la variable extensive.

Il importe de garder à l'esprit que ce type d'expression n'est toutefois valable que pour des transformations quasi-statiques.

Le calcul du travail échangé par un système est un aspect important des problèmes thermodynamiques. D'abord, cet échange ne peut intervenir *qu'aux frontières du système*.

Considérons par exemple la rupture d'une membrane séparant un volume de gaz d'un volume évacué.

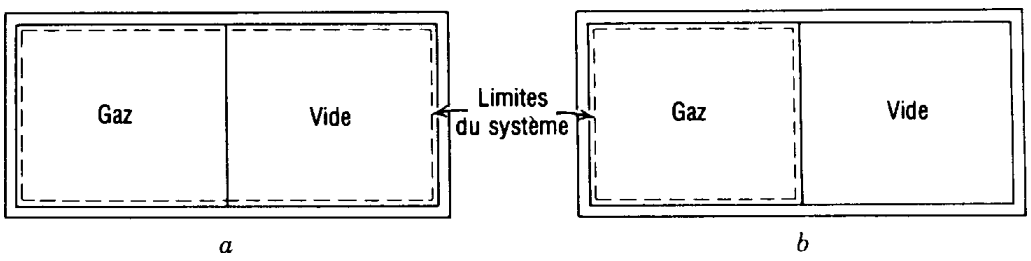


FIG. 4.5 – rupture d'une membrane séparant un volume de gaz d'un volume évacué

Lorsque la membrane se rompt, le gaz se répand dans la totalité du réservoir.

Considérons d'abord le système formé du gaz et de l'espace vide. Puisque la frontière du système ne se déplace pas lors de la transformation, on en déduit qu'aucun travail n'a été échangé.

Par contre, si l'on considère le système formé par le gaz, une variation de volume se produit, et l'on serait tenté de calculer le travail par l'expression $W = -\int_1^2 p\mathrm{d}V$. Mais il ne s'agit pas d'une transformation quasi-statique, et donc l'expression ne s'applique pas. En réalité, la variation de volume s'effectue sans résistance, et donc aucun travail n'est échangé.

Prenons un autre exemple, à savoir le système représenté ci-dessous.

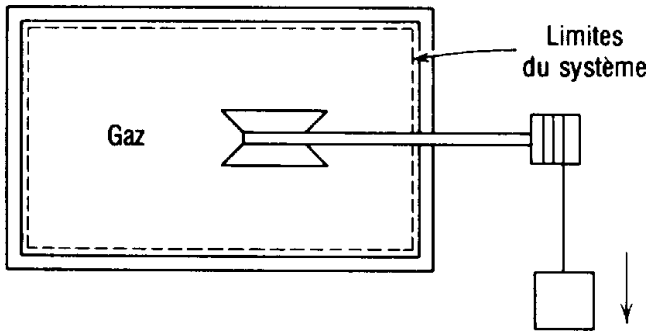


FIG. 4.6 – dispositif avec poulie

Le système considéré est constitué du contenu de l'enceinte. Lors du déplacement du poids, l'arbre tourne et du travail est reçu par le système, bien qu'il n'y ait aucune variation de volume. Le travail reçu est le produit du couple de torsion par l'angle de rotation à l'endroit où l'arbre est coupé par la frontière.

4.5 Définition du concept de chaleur

Considérons deux systèmes de température différentes. Comme on l'a déjà fait remarquer, si on met ces deux systèmes en contact, ils vont subir une transformation jusqu'à atteindre l'équilibre thermique.

Pour atteindre cet équilibre thermique, il y a dé manifestement y avoir *un transfert d'énergie* du système dont la température initiale était la plus élevée vers l'autre.

On appelle chaleur ou plus précisément *quantité de chaleur* la forme d'énergie transférée au cours d'un tel processus, c.-à-d. l'énergie transférée à la frontière d'un système sous l'effet d'une différence de température.

Il résulte de cette définition que, bien qu'un système contienne de l'énergie, on ne peut, dans celle-ci identifier une quantité de chaleur. L'existence d'une quantité de chaleur exige qu'il y ait transfert d'énergie à travers la frontière d'un système.

La chaleur étant comme le travail une forme d'énergie, on l'exprimera dans la même unité [J], et l'on considérera comme positive la chaleur reçue. On la désigne par le symbole Q.

Une transformation au cours de laquelle $Q = 0$ est appelée *adiabatique*.

Tout comme pour le travail, la chaleur échangée par un système avec le milieu extérieur au cours d'une transformation dépend non seulement des états initial et final, mais aussi du chemin parcouru. Mathématiquement, cela équivaut à dire que la quantité de chaleur infinitésimale

échangée au cours d'une transformation infinitésimale n'est pas une différentielle exacte, de sorte qu'on la note par le symbole δQ. La quantité de chaleur totale échangée s'exprime alors par

$$ {}_1Q_2 = \int_1^2 \delta Q $$

4.6 Comparaison entre chaleur et travail

Comme on l'aura remarqué, chaleur et travail présentent de nombreuses similitudes :

1. Chaleur et travail ne sont mis en évidence qu'à l'occasion d'une transformation d'un système. Un système ne contient ni travail ni chaleur, mais il peut échanger de l'énergie avec le milieu extérieur sous forme de travail et de chaleur.
2. Chaleur et travail ne peuvent être observés qu'aux frontières des systèmes, et représentent tous deux un transfert d'énergie à travers une frontière.
3. Travail et quantité de chaleur échangées au cours d'une transformation dépendent de la totalité du chemin parcouru au cours de celle-ci. Leurs variations ne sont donc pas des différentielles exactes et ce ne sont pas des variables d'état.

Chapitre 5

Le premier principe de la thermodynamique

Ayant défini les concepts de travail et de chaleur, nous sommes maintenant en mesure de présenter le premier principe de la thermodynamique, désigné encore sous le nom de *principe de conservation de l'énergie*. On commencera par les transformations de systèmes fermés, puis on l'étendra aux systèmes ouverts (volumes de contrôle).

5.1 Transformations fermées (cycles) d'un système fermé

Considérons le système fermé représenté ci-dessous

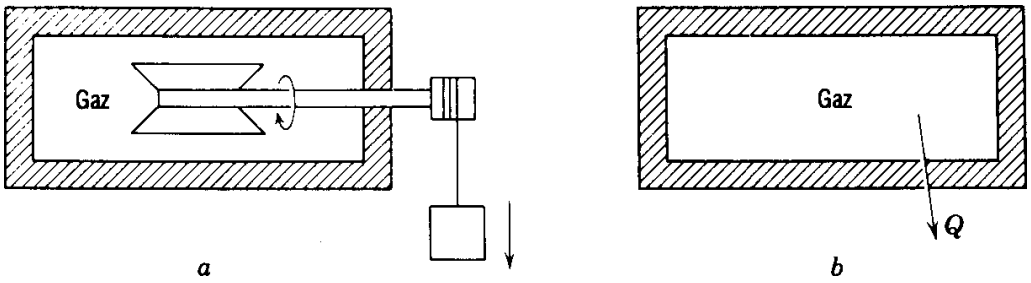


FIG. 5.1 – Transformations fermées (cycles) d'un système fermé

Dans un premier temps, on fournit un certain travail W au système en faisant tourner l'agitateur. Dans un deuxième temps, on laisse le système revenir à son état initial par échange d'une quantité de chaleur Q avec le milieu extérieur.

L'ensemble des deux transformations constitue donc un cycle. Le premier principe postule que

le travail W et la chaleur Q échangés au cours d'un tel cycle sont proportionnels, la constante de proportionnalité étant toujours la même.

$$JQ = W \qquad \Leftrightarrow \qquad J \oint \delta Q = \oint \delta W \tag{5.1}$$

Ce postulat est fondé sur l'observation expérimentale. La constante de proportionnalité J dans l'expression dépend des unités utilisées pour exprimer travail et chaleur. Si l'on exprime travail et chaleur dans la même unité, alors la constante vaut -1, de sorte que l'expression du premier principe devient

$$\oint (\delta Q + \delta W) = 0 \tag{5.2}$$

5.2 Transformations ouvertes d'un système fermé

Considérons un système fermé subissant un cycle formé de deux transformations ouvertes successives A et B représentées ci-dessous dans un diagramme $p - V$.

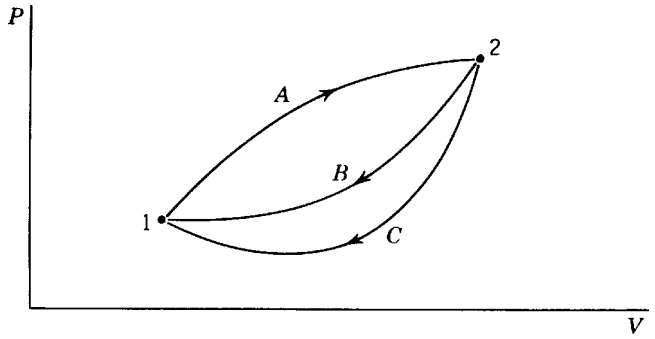


FIG. 5.2 – Transformations ouvertes d'un système fermé

En vertu du premier principe (5.2), on a

$$\oint (\delta Q + \delta W) = \int_1^2 (\delta Q + \delta W)_A + \int_2^1 (\delta Q + \delta W)_B = 0$$

Mais semblablement, sur le cycle formé des transformations A et C, on aura

$$\int_1^2 (\delta Q + \delta W)_A + \int_2^1 (\delta Q + \delta W)_C = 0$$

Par soustraction, on en déduit

$$\int_2^1 (\delta Q + \delta W)_B = \int_2^1 (\delta Q + \delta W)_C \tag{5.3}$$

On en déduit que, puisque les chemins B et C sont arbitraires, l'intégrale de $(\delta Q + \delta W)$ est indépendante du chemin parcouru, et ne dépend que des états initial et final, et par conséquent que $(\delta Q + \delta W)$ est une différentielle exacte.

On désigne par le symbole E la fonction (p. ex. de p et V) dont la différentielle

$$\mathrm{d}E = \delta Q + \delta W, \tag{5.4}$$

et on lui donne le nom d'*énergie du système*. Par construction, il s'agit d'une variable d'état.

En intégrant de l'état initial 1 jusqu'à l'état final 2 (p. ex. en suivant le chemin A), on aura donc

$${}_1Q_2 + {}_1W_2 = E_2 - E_1 \tag{5.5}$$

${}_1Q_2$ et ${}_1W_2$ étant la chaleur et le travail reçus par le système au cours de la transformation.

Du point de vue physique, la variable E représente l'énergie totale du système. Cette énergie peut se présenter sous diverses formes :

- énergie cinétique,
- énergie potentielle,
- énergie associée aux mouvements (de translation, de rotation, de vibration) des molécules,
- énergie associée au nuage électronique des molécules,
- énergie chimique,
- énergie électrique, p. ex. d'un condensateur chargé,
- ...

En thermodynamique, on a coutume de séparer les énergies cinétique et potentielle et de regrouper toutes les autres formes d'énergie du système en une seule variable appelée *énergie interne*, notée U. La raison en est que les énergies cinétique et potentielle dépendent du référentiel choisi et s'expriment directement en fonction de la masse, de la vitesse et des coordonnées dans ce référentiel.

La différentielle de l'énergie du système peut alors s'exprimer comme suit

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}U + \mathrm{d}E_{\text{cin.}} + \mathrm{d}E_{\text{pot.}} \tag{5.6}$$

de sorte qu'on obtient la forme différentielle du premier principe

$$\delta Q + \delta W = \mathrm{d}U + \mathrm{d}E_{\text{cin.}} + \mathrm{d}E_{\text{pot.}} \tag{5.7}$$

Les expressions de l'énergie cinétique et potentielle sont celles établies en mécanique rationnelle, ce que confirme l'analyse des deux cas suivants.

1. Soit un système subissant une force horizontale. Le travail infinitésimal effectué par cette force sera $\delta W = F\mathrm{d}x$. Mais, par la deuxième loi de Newton, $F = m\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$, où c est la composante de la vitesse dans la direction de la force. Comme seule varie l'énergie cinétique au cours de cette transformation, on a

$$\delta W = m\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = mc\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{mc^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{mc^2}{2}\right) = \mathrm{d}E_{\text{cin.}}$$

   puisque $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/c$.

2. Soit un système en mouvement rectiligne uniforme dans la direction verticale. Au cours du mouvement, seule varie l'énergie potentielle. Comme ce système est en mouvement rectiligne uniforme, il s'y applique une force F qui équilibre son poids. Le travail de cette force $\delta W = F\mathrm{d}z = mg\mathrm{d}z = \mathrm{d}(mgz)$, de sorte que

$$\delta W = F\mathrm{d}z = mg\mathrm{d} = \mathrm{d}(mgz) = \mathrm{d}E_{\text{pot.}}$$

En substituant les expressions de l'énergie cinétique et potentielle dans la forme différentielle du premier principe, on obtient

$$\delta Q + \delta W = \mathrm{d}U + \mathrm{d}\left(\frac{mc^2}{2}\right) + \mathrm{d}(mgz) \tag{5.8}$$

et, en intégrant entre les états initial et final (en supposant l'accélération de la gravité g constante)

$${}_1Q_2 + {}_1W_2 = U_2 - U_1 + m\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + mg(z_2 - z_1) \tag{5.9}$$

Remarquons en terminant que ces équations ne nous informent que sur *les variations* d'énergie interne, cinétique et potentielle, pas sur leur valeur absolue, ou en d'autres termes que les énergies définies par le premier principe sont connues à une constante près. Au besoin, on fixera ces constantes en attribuant une valeur conventionnelle des composantes de l'énergie à un état de référence.

5.3 L'énergie interne

L'énergie interne U, tout comme les énergies cinétique et potentielle, est une variable extensive. Comme à toutes les variables extensives, on peut lui associer une variable intensive massique, l'énergie interne massique u.

Comme on a vu au chapitre 3 qu'en l'absence de mouvement, de pesanteur et d'effets superficiels, électrique et magnétique, l'état d'une substance pure est entièrement déterminé par deux variables indépendantes, il en résulte que l'énergie interne est liée aux autres variables thermodynamiques par une relation d'état. Ainsi, dans les tables thermodynamiques des substances pures, l'énergie interne est tabulée avec les autres variables.

Dans la zone de saturation, l'énergie interne est liée au titre en vapeur comme le volume massique. En effet,

$$U = U_l + U_g \qquad \rightarrow \qquad mu = m_l u_l + m_g u_g$$

soit, en divisant par la masse m

$$u = (1 - x)u_l + xu_g = u_l + x(u_g - u_l)$$

5.4 Analyse de problèmes

A ce stade, il est utile de formaliser une méthodologie permettant d'analyser et de résoudre les problèmes de thermodynamique tels qu'ils se présenteront aux séances d'exercices et d'analyser les données recueillies lors des laboratoires.

Cette méthodologie prend la forme d'une série de questions auxquelles on devra apporter une réponse :

1. Quel est le système analysé ? Tracer ses frontières. S'agit-il d'un système fermé ou ouvert ?
2. Que sait-on de l'état initial ?
3. Que sait-on de l'état final ?
4. Que sait-on de la transformation subie par le système ? Certaines variables demeurent-elles constantes ?
5. Est-il utile de représenter la transformation sur un diagramme thermodynamique (p. ex. $p - v$) ?
6. Quel modèle décrit-il le comportement de la substance active (fluide à changement de phase avec propriétés tabulées, gaz parfait, etc.) ?
7. Quels sont les échanges aux frontières (travail, chaleur), quelle loi peut s'appliquer ?
8. Quelle stratégie de résolution va-t-on adopter, c.-à-d. comment va-t-on utiliser les informations rassemblées lors des étapes précédentes pour obtenir la solution ?

Bien qu'il ne soit pas toujours nécessaire de répondre systématiquement à toutes ces questions, cette méthodologie peut s'avérer d'une grande aide lorsqu'on est confronté à un problème nouveau ou qu'on est bloqué dans la résolution d'un problème. Plusieurs exemples sont donnés dans le livre de Van Wylen et al. On aura l'occasion de la mettre en pratique aux exercices.

5.5 L'enthalpie

Considérons une transformation quasi-statique isobare d'un système fermé qui n'échange du travail qu'à une frontière mobile.

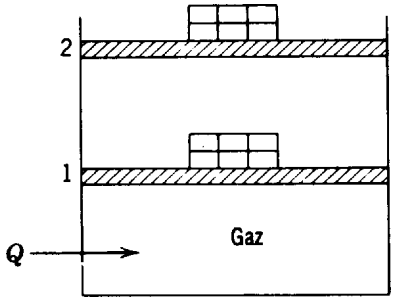


FIG. 5.3 – transformation quasi-statique isobare

En supposant nulles les variations d'énergie cinétique et potentielle, le premier principe s'écrit

$$ {}_1Q_2 + {}_1W_2 = U_2 - U_1 $$

Mais, s'agissant d'une transformation quasi-statique d'un système fermé à frontière mobile, le travail est donné par

$$ {}_1W_2 = -\int_1^2 p\mathrm{d}V = -p(V_2 - V_1) $$

puisque la pression est constante au cours de la transformation.

Par conséquent,

$$ {}_1Q_2 = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1) = (U_2 + p_2V_2) - (U_1 + p_1V_1) $$

et donc, pour ce type particulier de transformation, la quantité de chaleur échangée est égale à la variation de la grandeur $U + pV$. Puisque U, p et V sont des variables d'état, il en est de même de l'expression $U + pV$.

Il s'avère donc commode de définir une nouvelle variable extensive, que l'on appelle *l'enthalpie*

$$ H \equiv U + pV \tag{5.10} $$

et sa correspondante intensive massique

$$ h \equiv u + pv \tag{5.11} $$

Avec cette définition, la quantité de chaleur échangée au cours d'une transformation quasi-statique isobare d'un système fermé est égale à la variation d'enthalpie. Ce résultat n'est évidemment valide que pour cette transformation particulière, parce que le travail est égal à la variation du produit pV. Il ne l'est plus si la pression varie au cours de la transformation.

On verra que l'enthalpie a une signification dans d'autres cas également, en particulier pour les systèmes ouverts stationnaires.

Il arrive fréquemment que les tables thermodynamiques fournissent les valeurs de l'enthalpie mais pas celles de l'énergie interne. Mais, dans ce cas, on peut facilement obtenir l'énergie interne par aplication de la définition de l'enthalpie

$$u = h - pv$$

Même si l'enthalpie n'a pas de signification physique pour les transformations de systèmes fermés non isobares, cette relation entre variables d'état est valable en toutes circonstances.

Tout comme l'énergie interne, l'enthalpie est définie à une constante près, fixée arbitrairement pour un état de référence. L'enthalpie et l'énergie interne à l'état de référence doivent cependant être liées par la relation $h = u + pv$. A l'état liquide, le produit pv est souvent négligeable et l'on a $h \approx u$.

Dans la zone de saturation, l'enthalpie massique dépend du titre en vapeur de la même manière que le volume massique et que l'énergie massique, à savoir

$$h = (1 - x)h_l + xh_g = h_l + x(h_g - h_l)$$

5.6 Les chaleurs massiques à volume constant et à pression constante

Les chaleurs massiques sont un premier exemple de ce que l'on appelle *coefficients thermodynamiques*. Il s'agit de dérivées partielles de certaines variables thermodynamiques primaires telles que celles déjà introduites (p, v, T, u, h) par rapport à d'autres. Comme il s'agit de dérivées de variables d'état par rapport à d'autres variables d'état, elles sont elles-mêmes des variables d'état.

La chaleur massique à volume constant se définit de la manière suivante :

$$c_v \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \tag{5.12}$$

Remarquez bien l'indice v adjoint à la dérivée : il signifie que la dérivée est prise en maintenant constant le volume massique ou, en d'autres termes, qu'il s'agit de la dérivée partielle par rapport à T pour le choix du couple T, v comme variables indépendantes.

En effet, si l'on sait que, pour une substance pure, seules deux variables thermodynamiques sont indépendantes, on a, sauf cas particuliers comme les zones de saturation, le choix du couple de variables indépendantes.

Le passage d'un système de variables indépendantes à un autre n'étant rien d'autre, du point de vue mathématique, qu'un changement de variables ou encore une transformation de coordonnées, on peut, en utilisant les règles s'appliquant aux transformations de coordonnées dans un plan, établir les relations entre les dérivées dans divers systèmes de variables indépendantes (voir van Wylen, chap. 10).

Revenons à la chaleur massique à volume constant. On peut en donner une interprétation physique qui explique sa désignation. Si l'on considère une transformation isochore d'un système fermé, alors par application du premier principe

$$\mathrm{d}u = \delta q + \delta w = \delta q - p\mathrm{d}v = \delta q$$

puisque $\mathrm{d}v = 0$. On en déduit que

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\delta q}{\delta T}\right)_v$$

et l'on voit que la chaleur massique à volume constant est la quantité de chaleur échangée pour une élévation unitaire de température au cours d'une transformation isochore.

Semblablement, l'expression de la chaleur massique à pression constante, dont la signification physique est la quantité de chaleur échangée pour une élévation unitaire de température au cours d'une transformation isobare, sera, compte tenu du fait que pour une telle transformation, la quantité de chaleur échangée est égale à la variation d'enthalpie (cfr section précédente)

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{\delta T}\right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \tag{5.13}$$

Remarques

1. Comme les chaleurs massiques sont des variables d'état, elles sont indépendantes de la transformation subie par le système. Ainsi, si l'on considère le système fermé à volume constant auquel on fournit 100 kJ sous forme de chaleur, ou sous forme de travail,

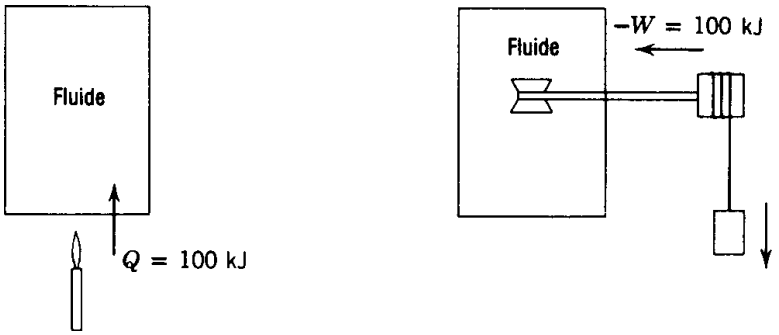


FIG. 5.4 – le système fermé à volume constant auquel on fournit 100 kJ sous forme de chaleur, ou sous forme de travail

la variation d'énergie interne est la même dans les deux cas, et par conséquent aussi celle de température. Donc, la chaleur massique moyenne est identique dans les deux cas.

2. Les chaleurs massiques ainsi définies ne concernent que le travail de compression étudié à la section 4.2. Pour les autres formes de travail, telles que celles mentionnées à la section 4.3, on définit deux chaleur massiques, l'une correspondant à une transformation à « déplacement »constant, et l'autre correspondant à une transformation à « force »constante.
3. Pour les solides et les liquides, le volume massique est très petit, de sorte que, comme on l'a mentionné à la section précédente, $\mathrm{d}h = \mathrm{d}u + \mathrm{d}(pv) \approx \mathrm{d}u$. Il en résulte que

$$c_p \approx c_v \tag{5.14}$$

et l'on peut ommettre l'indice. De plus, pour de nombreuses transformations, on peut admettre que la chaleur massique est approximativement constante, de sorte que, pour une transformation finie,

$$h_2 - h_1 \approx u_2 - u_1 = c(T_2 - T_1) \tag{5.15}$$

5.7 L'énergie interne, l'enthalpie et les chaleurs massiques des gaz parfaits

Tout comme on l'avait fait pour l'équation d'état liant p, v et T, nous allons maintenant discuter la forme particulière de l'équation d'état liant l'énergie interne aux autres variables thermodynamiques pour les substances pures en phase vapeur aux faibles masses volumiques.

Cette équation a été découverte grâce à *l'expérience de Joule*, illustrée ci-dessous.

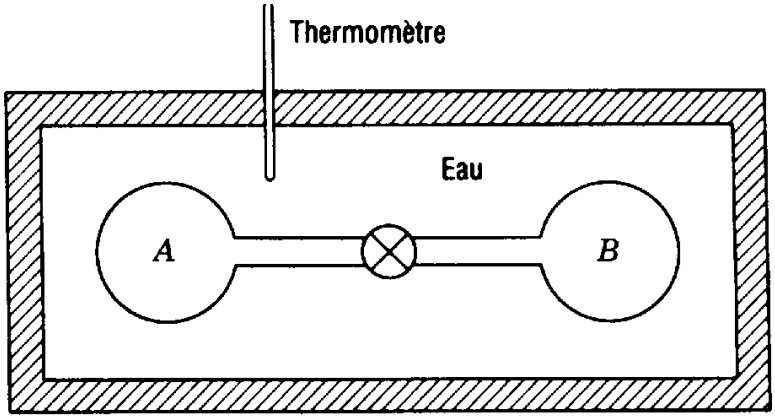


FIG. 5.5 – expérience de Joule

Deux récipients connectés entre eux par un tuyau dans lequel est insérée une vanne sont immergés dans un réservoir d'eau isolé. Le réservoir A est rempli d'un gaz à haute pression, alors que le réservoir B a été évacué, et l'on attend que l'eau et les réservoirs soient en équilibre thermique.

La vanne est ouverte et le gaz se répand du réservoir A dans le réservoir B jusqu'à ce que les pressions s'égalisent.

- Comme on l'a déjà fait observer, cette transformation du système « gaz »s'effectue sans échange de travail.
- Par ailleurs, Joule constate qu'au cours de la transformation, la température de l'eau ne change pas, ce qui implique que la transformation s'est effectuée *sans échange de chaleur*.

Par application du premier principe, il en résulte que l'énergie interne du système « gaz »est restée inchangée.

On en déduit que l'énergie interne d'un gaz ne dépend pas de la pression, mais uniquement de la température :

$$u = f(T) \tag{5.16}$$

Ce résultat est confirmé par la mécanique statistique. Il en découle plusieurs corollaires :

- La chaleur massique à volume constant

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = \frac{du}{dT} \tag{5.17}$$

  est aussi une fonction de la température uniquement.
- L'enthalpie

$$h = u + pv = u + RT \tag{5.18}$$

  est aussi une fonction de la température uniquement.

– La chaleur massique à pression constante

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = \frac{dh}{dT} = c_v + R \tag{5.19}$$

est aussi une fonction de la température uniquement.

Comme on l'a souligné plus haut, l'énergie interne est due à plusieurs contributions. Mis à part la contribution chimique, qui n'intervient de toute façon pas en l'absence de réaction chimique, les autres contributions dues au mouvement des molécules et à leur nuage électronique peuvent s'évaluer théoriquement et l'on obtient les résultats suivants pour le modèle le plus simple de rotateur rigide/oscillateur harmonique :

Translation $e_{tr} = \frac{3}{2}RT$

Rotation $e_{rot} = RT\left(1 - \frac{\theta_R}{\theta_R + 3T}\right)$ où θ_R est la température de rotation de la molécule, inversément proportionnelle à son moment d'inertie.

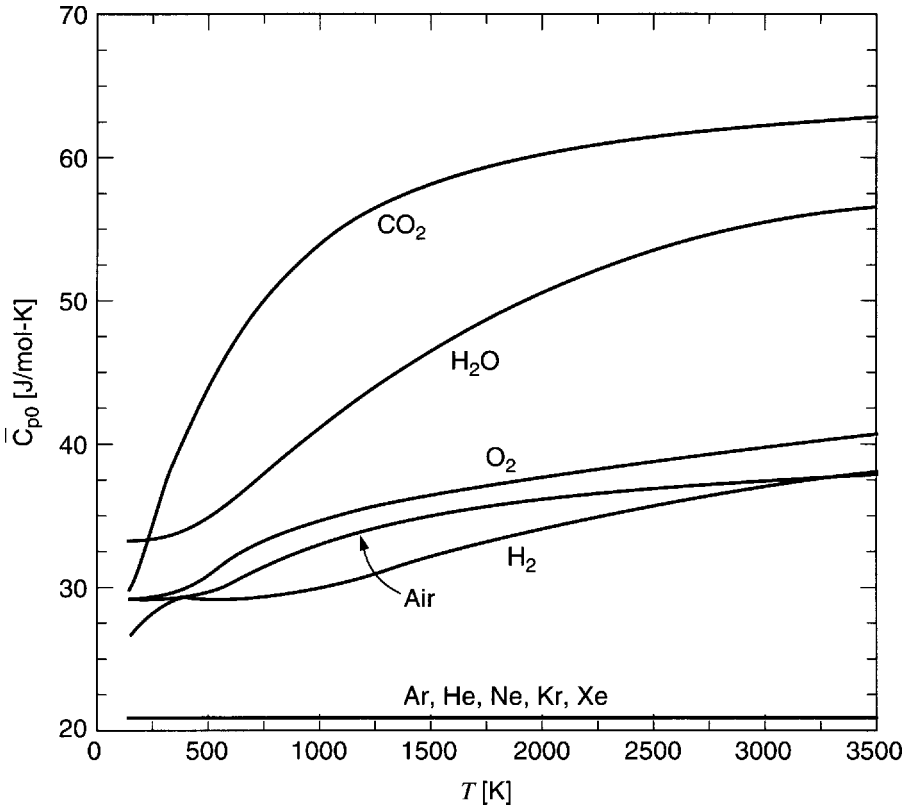
Vibration Pour chaque mode vibrationnel, $e_{vib} = R_s \frac{\theta_V}{e^{\frac{\theta_V}{T}} - 1}$ où θ_V est la température de vibration du mode, liée à sa fréquence de vibration.

Nuage électronique Pour le nuage électronique, il n'y a pas d'expression analytique simple pour les niveaux d'énergie accessibles, qui doivent être obtenus expérimentalement (mesures spectroscopiques), et donc pas d'expression analytique simple de l'énergie électronique.

Pour la plupart des gaz courants,

– θ_R est très faible (quelques K), de sorte qu'aux températures usuelles, $e_{rot} = RT$ — la seule exception est l'hydrogène, qui, en raison de son très faible moment d'inertie, a une température de rotation sensiblement plus élevée (≈ 80 K).
– Pour les molécules diatomiques, les températures de vibration sont en général assez bien plus élevées que la température ambiante, de sorte qu'à température ambiante les modes vibrationnels ne sont pas excités, et par conséquent l'énergie vibrationnelle est nulle.
Par contre, pour les molécules polyatomiques (CO_2, H_2O), certains modes vibrationnels sont déjà excités à la température ambiante.
– Aux températures ambiantes, le nuage électronique est dans l'état fondamental, et donc l'énergie électronique est nulle.

Ces résultats sont illustrés par le diagramme suivant, qui représente la chaleur molaire à pression constante de divers gaz.



• Pour les gaz monoatomiques,

$$\bar{c}_p = \frac{5}{2}\bar{R} = 20,53 \text{ J/mol K}$$

• Pour les gaz diatomiques à température ambiante,

$$\bar{c}_p = \frac{7}{2}\bar{R} = 28,75 \text{ J/mol K}$$

(sauf pour l'hydrogène).

• Pour les gaz polyatomiques,

$$\bar{c}_p > \frac{7}{2}\bar{R}$$

FIG. 5.6 – chaleur molaire à pression constante de divers gaz

Pour les applications, on a le choix entre 3 méthodes de sophistication croissante :

1. On considère les chaleurs massiques constantes. C'est toujours une excellente approximation pour les gaz monoatomiques. Pour les gaz diatomiques, ce n'est valable que pour une gamme limitée de températures au voisinage de la température ambiante, sauf si l'on utilise une valeur moyenne sur l'intervalle de températures considéré.
2. On utilise une relation empirique ajustée aux valeurs exactes fournies par la thermodynamique statistique. De telles relations sont disponibles dans la littérature, notamment dans le livre de Van Wylen et al.
3. On utilise les expressions fournies par la thermodynamique statistique, soit directement, soit sous forme de tables.

5.8 Le premier principe sous la forme d'une équation d'évolution temporelle

En divisant la forme différentielle du premier principe (5.7)

$$\delta Q + \delta W = \mathrm{d}U + \mathrm{d}E_{\text{cin.}} + \mathrm{d}E_{\text{pot.}}$$

par l'intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$ entre les deux états successifs, on obtient une équation pour le taux de variation de l'énergie du système, à savoir

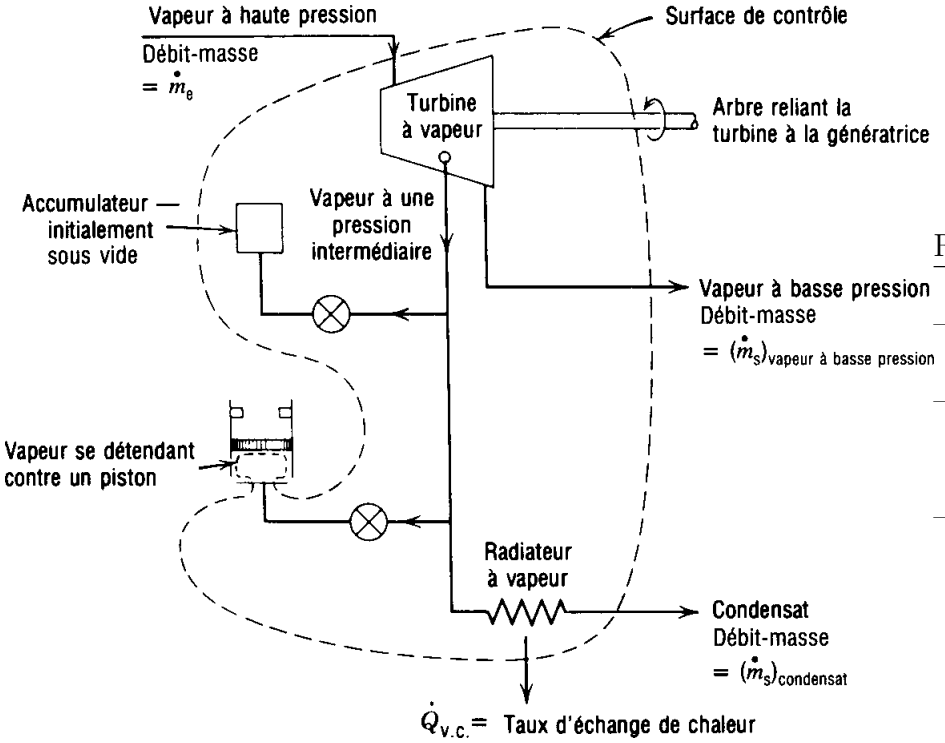
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}\right) = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = \dot{Q} + \dot{W} \tag{5.20}$$

où $\dot{Q}$ et $\dot{W}$ sont respectivement le taux de transfert de chaleur et la puissance fournis au systèmes.

Il faut remarquer que, ce faisant, on s'éloigne du point de vue strictement classique, puisque selon ce point de vue, on ne considère que des systèmes en équilibre et que toute variation dans le temps implique nécessairement un certain déséquilibre. Toutefois, si l'échelle de temps de la transformation est beaucoup plus grand que celles des phénomènes de relaxation vers l'équilibre, ce qui est très souvent le cas, cette approche est valable. C'est d'ailleurs l'approche couramment utilisée en mécanique des fluides et en thermique (voir Phénomènes de transport)[1].

5.9 Conservation de la masse pour les systèmes ouverts

Si l'on néglige les phénomènes relativistes, alors la masse d'un système fermé (qui n'échange pas de matière avec le milieu extérieur) est constante. On se propose à présent d'en déduire les implications pour un système ouvert général, tel que celui représenté ci-dessous.



Remarques

- La frontière du système est *une surface fermée.*
- (Certaines parties de) la frontière peu(ven)t être mobile(s).
- (Certaines parties de) la frontière peu(ven)t être le siège d'échange de matière, de travail et de chaleur avec le milieu extérieur.

FIG. 5.7 – système ouvert général

Considérons le système fermé F constitué de la matière contenue dans le système ouvert O au moment initial. Etant donné que ce nouveau système est fermé, sa masse doit rester constante. Comme, par définition de la masse volumique, $m_F = \int_{V_F} \rho \, \mathrm{d}V$, où V_F est le volume (mobile) occupé par le système fermé (la matière initialement contenue dans le système ouvert), on a

$$\frac{\mathrm{d}m_F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_F} \rho \, \mathrm{d}V = 0$$

[1]Le code de ce syllabus étant en partie fournit par Degrez, je rajoute le texte qu'il avait décidé de ne pas mettre. Je le signalerai chaque fois

Cette expression peut se développer à l'aide des règles de dérivation des intégrales de volume sur volumes mobiles (vues en Mécanique des milieux continus).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_F}\rho\,\mathrm{d}V=\int_{V_F}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V+\oint_{S_F}\rho\vec{b}_F\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

où $\vec{b}_F$ est le vecteur vitesse de déplacement de la frontière du volume V_F. Le système étant fermé, cette vitesse doit être la vitesse de la matière $\vec{b}_F=\vec{c}$.

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}m_F}{\mathrm{d}t}=\int_{V_F}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V+\oint_{S_F}\rho\vec{c}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=0 \tag{5.21}$$

Mais par ailleurs, la dérivée par rapport au temps de la masse contenue dans le système ouvert O est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}m_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_O}\rho\,\mathrm{d}V=\int_{V_O}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V+\oint_{S_O}\rho\vec{b}_O\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{5.22}$$

où $\vec{b}_O$ est le vecteur vitesse de déplacement de la frontière du système ouvert O. En combinant ces deux expressions, compte tenu du fait qu'à l'instant initial, $V_F=V_O=V$ et $S_F=S_O=S$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}m_F}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m_O}{\mathrm{d}t}+\oint_S\rho(\vec{c}-\vec{b}_O)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=0 \tag{5.23}$$

Mais pour toute partie Σ de la surface S

$$\oint_\Sigma\rho(\vec{c}-\vec{b}_O)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\dot{m}\ (=q_m)$$

est le débit traversant cette partie. On obtient donc finalement en désignant par l'indice s les parties de S traversées par un débit sortant et par l'indice e les parties traversées par un débit entrant

$$\frac{\mathrm{d}m_O}{\mathrm{d}t}+\sum\dot{m}_s-\sum\dot{m}_e=0 \tag{5.24}$$

Cette équation est communément appelée *équation de continuité*.

Dans le cas particulier d'un système en régime permanent, cette équation se réduit à

$$\sum\dot{m}_s-\sum\dot{m}_e=0 \tag{5.25}$$

qui exprime l'égalité des débits entrants et sortants.

5.10 Le premier principe de la thermodynamique pour les systèmes ouverts

On déduira à présent la forme du premier principe applicable aux systèmes ouverts en suivant la même procédure. Appliquons la forme temporelle du premier principe (5.20)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}\right)=\dot{Q}_F+\dot{W}_F$$

au système fermé F considéré à la section précédente.

Tout d'abord, développons l'expression du membre de gauche en appliquant les règles de dérivation des intégrales de volume :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}\right)_F=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_F}\rho\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)\,\mathrm{d}V=$$
$$\int_{V_F}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)\right\}\,\mathrm{d}V+\oint_{S_F}\rho\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)\vec{c}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Par ailleurs, en appliquant la même relation au calcul du taux de variation de l'énergie totale du système ouvert O, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}\right)_O=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_O}\rho\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)\,\mathrm{d}V=$$
$$\int_{V_O}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)\right\}\,\mathrm{d}V+\oint_{S_O}\rho\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)\vec{b}_O\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

Combinant avec la relation précédente, on obtient, à l'instant initial

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}\right)_F&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}\right)_O+\oint_S\rho\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)(\vec{c}-\vec{b}_O)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}\right)_O+\sum\dot{m}_s\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)_s-\sum\dot{m}_e\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)_e\end{aligned}$$

en supposant les propriétés uniformes sur les sections d'entrée et de sortie.

Par ailleurs, analysons la puissance reçue aux sections d'entrée et de sortie (puissance d'écoulement ou de transvasement). Du fait que ces sections sont mobiles (avec une vitesse $\vec{c}$ pour le système fermé et $\vec{b}_O$ pour le système ouvert)

$$\begin{aligned}\dot{W}_{F,e}&=-\int_{S_e}p\vec{c}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=-\int_{S_e}\frac{p}{\rho}\rho\vec{c}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\sum\dot{m}_e\left(\frac{p}{\rho}\right)_e-\int_{S_e}p\vec{b}_O\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\\&=\sum\dot{m}_e\left(\frac{p}{\rho}\right)_e+\dot{W}_{O,e}\\\dot{W}_{F,s}&=-\int_{S_s}p\vec{c}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=-\int_{S_s}\frac{p}{\rho}\rho\vec{c}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=-\sum\dot{m}_s\left(\frac{p}{\rho}\right)_s-\int_{S_s}p\vec{b}_O\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\\&=-\sum\dot{m}_s\left(\frac{p}{\rho}\right)_s+\dot{W}_{O,s}\end{aligned}$$

En rassemblant les divers termes, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}\right)_O+\sum\dot{m}_s\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)_s-\sum\dot{m}_e\left(u+\frac{c^2}{2}+gz\right)_e&\\=\dot{Q}_F+\dot{W}_O-\sum\dot{m}_s\left(\frac{p}{\rho}\right)_s+\sum\dot{m}_e\left(\frac{p}{\rho}\right)_e&\end{aligned}$$

ou encore, en faisant passer les termes de pression du membre de droite au membre de gauche,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}\right)_O+\sum\dot{m}_s\left(\underbrace{u+\frac{p}{\rho}}_{h}+\frac{c^2}{2}+gz\right)_s-\sum\dot{m}_e\left(\underbrace{u+\frac{p}{\rho}}_{h}+\frac{c^2}{2}+gz\right)_e&\\=\dot{Q}_F+\dot{W}_O=\dot{Q}_O+\dot{W}_O&\end{aligned}$$

puisque $\dot{Q}_F = \dot{Q}_O$, ce qui est l'expression cherchée du premier principe pour les systèmes ouverts.

L'expression finale est donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}\right)_O + \sum \dot{m}_s \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \sum \dot{m}_e \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.26)$$

Dans le cas particulier d'un système en régime permanent, elle se réduit à

$$\sum \dot{m}_s \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \sum \dot{m}_e \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.27)$$

et, pour le cas d'une seule entrée et d'une seule sortie,

$$\dot{m}\left[\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e\right] = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.28)$$

puisque dans ce cas, $\dot{m}_s = \dot{m}_e = \dot{m}$ est le débit traversant le système.

5.11 Les systèmes ouverts en régime permanent

Pour la commodité, on rappellera ici les résultats établis pour les systèmes ouverts en régime permanent. Ce cas constitue un modèle adéquat pour décrire le fonctionnement en régime de bon nombre de dispositifs comme les compresseurs, turbines, vannes, tuyères, échangeurs de chaleur. Ces systèmes se caractérisent par les propriétés suivantes :

1. la frontière du système est immobile ;
2. les propriétés (vitesse, variables thermodynamiques) en chaque point du système sont indépendantes du temps ;
3. les débits de masse à chaque section d'entrée et de sortie, et les propriétés sur chacune de ces sections sont indépendantes du temps ;
4. le taux de transfert de chaleur et la puissance reçues par le système sont indépendants du temps.

Dans ces conditions, les équations de conservation s'écrivent

$$\sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0 \quad (5.29)$$

$$\sum \dot{m}_s \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \sum \dot{m}_e \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.30)$$

Remarquons que, du fait que les sections d'entrée et de sortie sont fixes, comme toutes les autres parties de la frontière du système, aucun travail de pression n'est effectué sur ces sections.

Dans le cas particulier d'une seule entrée et d'une seule sortie, ces expressions se simplifient en

$$\dot{m}_s = \dot{m}_e = \dot{m} \quad (5.31)$$

$$\dot{m}\left[\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e\right] = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.32)$$

En divisant cette dernière expression par le débit $\dot{m}$, on obtient

$$\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = q + w \tag{5.33}$$

où q et w sont la chaleur et le travail reçus par unité de masse

$$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}; \qquad w = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} \tag{5.34}$$

On emploie souvent ce modèle pour l'analyse des machines volumétriques telles que les compresseurs ou moteurs volumétriques. Or, pour ces systèmes, le débit est variable, de même que chaleur et travail échangés. On se place dans les conditions d'application du modèle en considérant des valeurs *moyennes* pour un nombre entier de cycles mécaniques.

5.12 La détente à travers une vanne et le coefficient de Joule-Thomson

Considérons la détente à travers une vanne, telle que celle employée dans la machine frigorifique à compression de vapeur décrite dans l'introduction (1.3). Une telle vanne s'apparente à un diaphragme tel que représenté ci-dessous.

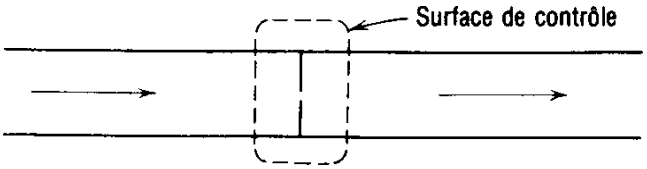


FIG. 5.8 – détente à travers une vanne

Le système est supposé en régime permanent et ne reçoit aucun travail. De plus, ses dimensions sont tellement faibles qu'on peut raisonnablement supposer que le transfert de chaleur est négligeable. Négligeant également l'énergie potentielle, on a alors

$$h_e + \frac{c_e^2}{2} = h_s + \frac{c_s^2}{2}$$

Si le fluide détendu est un gaz, la chute de pression s'accompagne d'une diminution de masse volumique et, par conservation du débit, d'une augmentation de vitesse. L'augmentation correspondante d'énergie cinétique est souvent négligeable, de sorte que

$$h_e \approx h_s$$

La variation de température à travers la vanne est alors caractérisée par le coefficient de Joule-Thomson μ_J défini par

$$\mu_J = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h \tag{5.35}$$

Un coefficient de Joule-Thomson positif signifie alors que la température diminue à travers la vanne (puisque la pression diminue), alors qu'elle augmente si le coefficient de Joule-Thomson est négatif.

5.13 Systèmes uniformes avec écoulement uniforme

On considère ici un autre modèle simplifié qui s'applique à certaines transformations non permanentes de systèmes ouverts. Les hypothèses simplificatrices sont les suivantes :

1. la frontière du sytème est immobile ;
2. les propriétés de la matière dans le système peuvent varier dans le temps mais sont supposées uniformes dans tout le système, ou du moins dans des parties identifiables du système dont le système est l'union ;
3. les propriétés dans les sections d'entrée et de sortie sont constantes dans le temps, mais les débits peuvent varier.

Dans ces conditions, les équations générales applicables aux systèmes fermés établies précédemment deviennent

$$\frac{\mathrm{d}m_O}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0 \tag{5.36}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\underbrace{m\left(u + \frac{c^2}{2} + gz\right)}_{U+E_{\text{cin.}}+E_{\text{pot.}}} \right]_O + \sum \dot{m}_s \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \sum \dot{m}_e \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = \dot{Q} + \dot{W} \tag{5.37}$$

En intégrant ces expressions dans le temps entre un état initial 1 et un état final 2, on obtient

$$m_2 - m_1 + \sum m_s - \sum m_e = 0 \tag{5.38}$$

$$m_2\left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2\right) - m_1\left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1\right) + \sum m_s \left(h_s + \frac{c_s^2}{2} + gz_s\right) - \sum m_e \left(h_e + \frac{c_e^2}{2} + gz_e\right) = Q_O + W_O \tag{5.39}$$

où m_s et m_e sont respectivement la masse totale ayant traversé les sections d'entrée et de sortie, et Q_O et W_O les chaleur et travail reçus par le système au cours de la transformation.

Chapitre 6

Le second principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique exprime la conservation de l'énergie au cours d'une transformation quelconque. Il ne fait aucune distinction entre les diverses formes d'énergie, et en particulier n'impose aucune restriction quant au sens dans lequel chaleur et travail sont échangés. Ainsi, la transformation inverse d'une transformation qui satisfait le premier principe, le satisfait également.

Or, nous savons d'expérience que certaines transformations sont possibles dans un sens et pas dans le sens inverse : ainsi un transfert de chaleur d'un corps chaud vers un corps froid s'effectue sans travail, mais pas l'inverse.

Le second principe de la thermodynamique établit précisément un critère permettant de distinguer entre les transformations possibles et celles qui ne le sont pas. Tout comme le premier principe, il est fondé sur l'expérience.

Comme au chapitre précédent, on formulera le second principe d'abord pour une transformation cyclique d'un système fermé. L'extension aux transformations ouvertes d'un système fermé et aux systèmes ouverts sera ensuite développée au chapitre suivant.

6.1 Machines thermiques et réfrigérateurs

Considérons à nouveau le système présenté lors de la formulation du premier principe

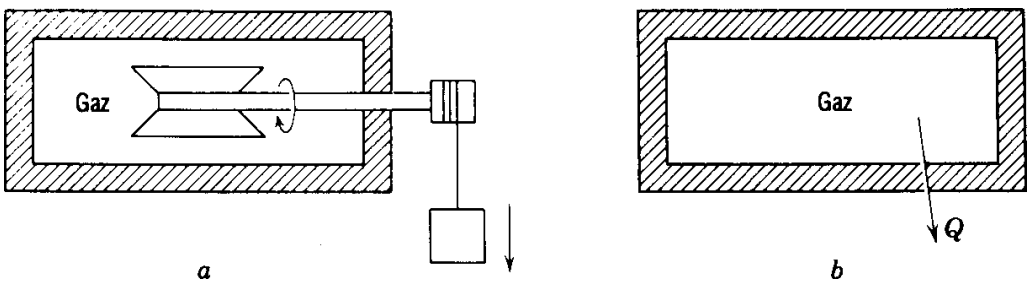


Fig. 6.1 – dispositif travail/chaleur

et supposons que la transformation subie comprenne d'abord un apport de travail sans

échange de chaleur, suivie d'un refroidissement par transfert de chaleur vers le milieu extérieur jusqu'au retour à l'état initial.

Nous savons d'expérience que le cycle inverse est impossible, ou en d'autres termes que si nous fournissons d'abord de la chaleur, il ne reviendra pas à l'état initial en faisant tourner l'agitateur, mais simplement en cédant la même quantité de chaleur au milieu extérieur.

De même, comme nous l'avons mentionné en introduction de ce chapitre, si, dans une première étape, un corps froid reçoit une certaine quantité de chaleur d'un corps chaud, il est impossible de le faire revenir dans son état initial par simple transfert de chaleur vers le corps chaud, c'est à dire de lui faire subir un cycle complet par simple échange de chaleur.

Ceci nous conduit à introduire les notions de *machine thermique* et de *cycle moteur* d'une part, de *réfrigérateur* ou *pompe à chaleur* encore appelée *thermopompe* et de *cycle récepteur* d'autre part.

La machine thermique est un système décrivant un cycle moteur, c.-à-d. recevant un travail net négatif (fournissant du travail au milieu extérieur) et une quantité de chaleur nette positive résultant d'un échange de chaleur provenant d'un corps chaud, et d'un autre échange de chaleur vers un corps froid[1].

Un réfrigérateur ou une thermopompe au contraire est un système décrivant un cycle, qui reçoit de la chaleur d'un corps froid et en cède à un corps chaud. Ce processus exige que le système reçoive un travail net positif, et par conséquent que la quantité de chaleur nette échangée soit négative.

Illustrons ces définitions par quelques exemples.

On considère d'abord la machine thermique élémentaire représentée ci-dessous, consistant en un cylindre fermé par un piston libre de se déplacer entre deux butées.

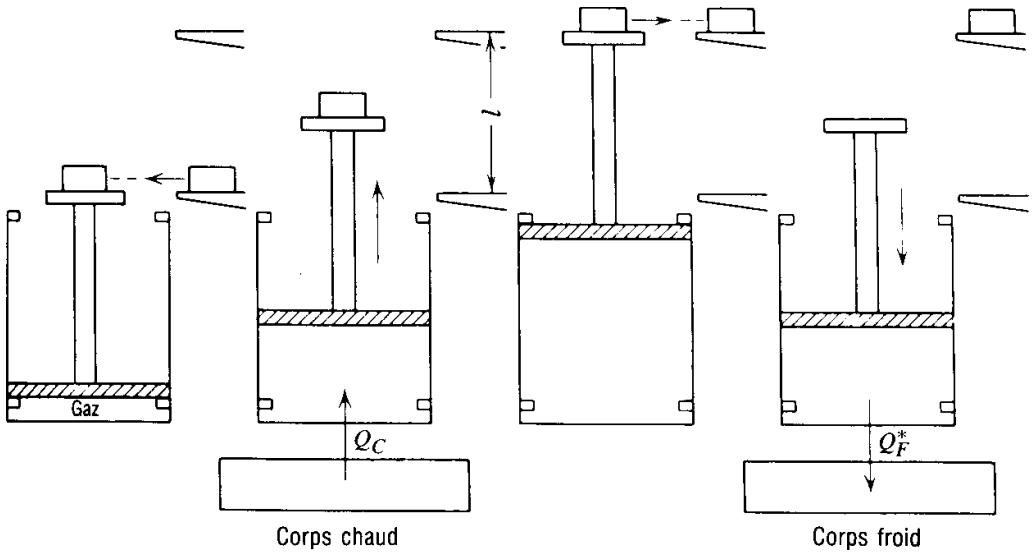


FIG. 6.2 – machine thermique

[1]On emploie souvent l'expression « machine thermique »dans un sens plus large pour désigner tout dispositif qui produit du travail par l'entremise d'un échange de chaleur ou d'une combustion, même si le système correspondant ne décrit pas un cycle, p. ex. les machines volumétriques à combustion interne et les turbines à gaz.

Les phases de la transformation sont les suivantes :

1. On commence par déposer une masse sur le piston, qui repose initialement sur la butée inférieure ;
2. on chauffe le fluide contenu dans le cylindre par échange de chaleur avec un corps chaud jusqu'à ce que le piston touche la butée supérieure ;
3. on retire alors la masse du piston ;
4. on laisse refroidir le fluide par échange de chaleur avec un corps froid jusqu'à ce qu'il retourne à son état initial.

Du fait que la masse a été soulevée lors de la transformation, il s'agit clairement d'un cycle moteur, et donc le système est une machine thermique.

Un deuxième exemple de machine thermique est la centrale thermique, telle que décrite dans l'introduction (1.2), et que l'on peut schématiser comme suit.

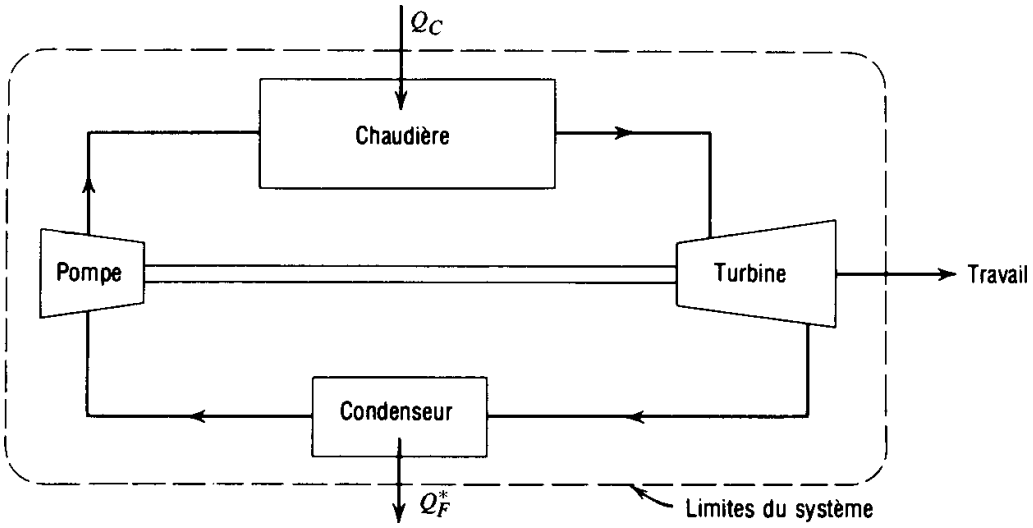


FIG. 6.3 – machine thermique 2 : centrale thermique

Contrairement à l'exemple précédent dans lequel un système fermé subissait une évolution temporelle cyclique, ce dispositif-ci fonctionne grâce à un écoulement permanent de fluide qui décrit un cycle.

A ce stade, il est naturel d'introduire le concept d'*efficacité thermique*[2] d'un cycle moteur.

D'une manière générale, l'efficacité est définie comme le rapport de l'*effet utile* à l'*effet onéreux*. Dans le cas d'un cycle moteur, l'effet utile (recherché) est le travail produit, et l'effet onéreux est la chaleur reçue du corps chaud (on conçoit en effet que la chaleur cédée au corps froid puisse être considérée comme « gratuite »). On a donc

$$\varepsilon_{\text{th}} = \frac{W^*}{Q_C} = \frac{Q_C - Q_F^*}{Q_C} = 1 - \frac{Q_F^*}{Q_C} \tag{6.1}$$

[2]On emploie traditionnellement le terme « rendement thermique »plutôt que le terme « efficacité thermique »dans la littérature, notamment dans le livre de Van Wylen. La raison pour laquelle ce dernier terme a été préféré est que la grandeur ainsi définie ne donne aucune information sur le degré de perfection du dispositif. On préférera réserver le terme de rendement à des grandeurs caractérisant ce degré de perfection.

Considérons à présent un système de réfrigération tel que celui décrit dans l'introduction (1.3), schématisé comme suit.

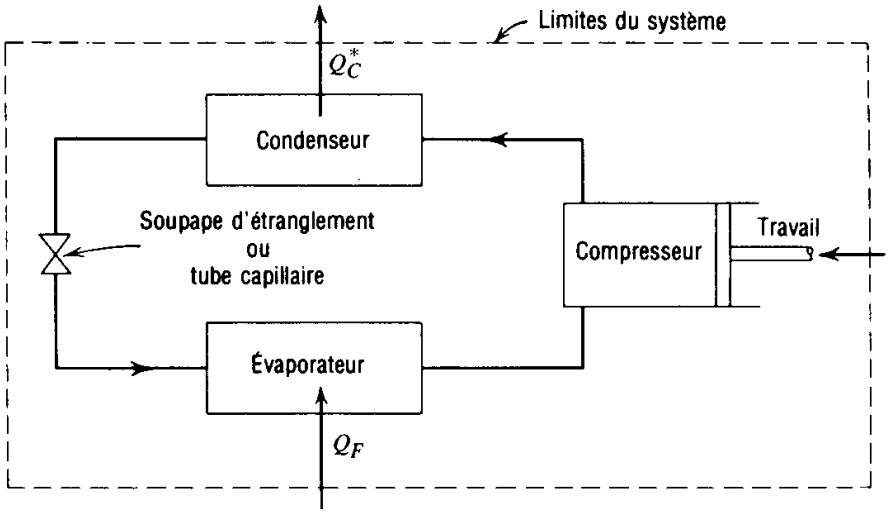


FIG. 6.4 – un système de réfrigération

Tout comme la centrale électrique, ce dispositif fonctionne grâce à un écoulement permanent de fluide qui décrit un cycle. Le système reçoit de la chaleur d'un corps froid dans l'évaporateur, du travail dans le compresseur et cède de la chaleur à un corps chaud dans le condenseur.

La définition de l'efficacité d'un tel cycle dépend de l'effet utile recherché. Si l'on s'intéresse à la chaleur extraite du corps froid (fonctionnement en réfrigérateur), alors l'efficacité — encore appelée coefficient de performance — frigorifique est définie comme

$$\varepsilon_{\text{fr}} = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_F}{Q_C^* - Q_F} = \frac{1}{Q_C^*/Q_F - 1} \tag{6.2}$$

Si par contre on s'intéresse à la chaleur cédée au corps chaud (fonctionnement en pompe à chaleur), alors on définit l'efficacité — ou coefficient de performance — calorifique comme

$$\varepsilon_{\text{ch}} = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_C^*}{Q_C^* - Q_F} = \frac{1}{1 - Q_F/Q_C^*} = 1 + \varepsilon_{\text{fr}} \tag{6.3}$$

Comme on peut le constater, cette efficacité est toujours supérieure à l'unité.

Pour terminer cette section, on introduit la notion de *réservoir thermique* ou encore *source de chaleur* :

On appelle réservoir thermique ou source de chaleur un système susceptible d'échanger une quantité arbitraire de chaleur sans que sa température soit modifiée.

Pratiquement, un réservoir thermique peut être réalisé de plusieurs manières :
- un réservoir de fluide thermostatisé ;
- un mélange liquide/vapeur. Un tel système reçoit ou cède de la chaleur par évaporation ou condensation à température constante. La quantité de chaleur échangée peut aisément se mesurer en mesurant la masse évaporée ou condensée ;
- un système de très grande taille, comme la mer ou l'atmosphère, dont la température ne varie que de manière infinitésimale lors d'un échange de chaleur puisque les quantités de chaleur échangées sont infinitésimales par rapport à son énergie interne.

6.2 Le second principe de la thermodynamique

Il existe deux formulations classiques du second principe de la thermodynamique, dont on montrera d'ailleurs qu'elles sont équivalentes :

Enoncé de Kelvin-Planck *Il est impossible de réaliser un appareil décrivant un cycle qui fournirait du travail en échangeant de la chaleur avec une seule source.*

Cet énoncé se réfère aux machines thermiques et stipule qu'un système ne peut transformer intégralement en travail la chaleur reçue d'une source chaude. Il faut qu'une certaine quantité de chaleur soit cédée à une source froide. Il s'ensuit que l'efficacité thermique d'une machine thermique est nécessairement inférieure à l'unité.

Enoncé de Clausius *Il est impossible de réaliser un appareil décrivant un cycle dont le seul effet serait de transférer une quantité de chaleur d'une source froide à une source chaude.*

Cet énoncé se réfère aux machines frigorifiques et aux pompes à chaleur et stipule qu'on ne peut réaliser une machine frigorifique sans apport de travail. Il s'ensuit que l'efficacité frigorifique, de même que l'efficacité calorifique sont nécessairement finies.

6.2.1 Equivalence des énoncés

Montrons à présent l'équivalence des énoncés. Pour ce faire, on montrera que la violation de l'énoncé de Clausius entraîne celle de l'énoncé de Kelvin-Planck. Supposons donc qu'on puisse réaliser un appareil qui transfère une quantité de chaleur Q_F d'une source froide à une source chaude sans apport de travail. Associons-y une machine thermique qui produit un travail

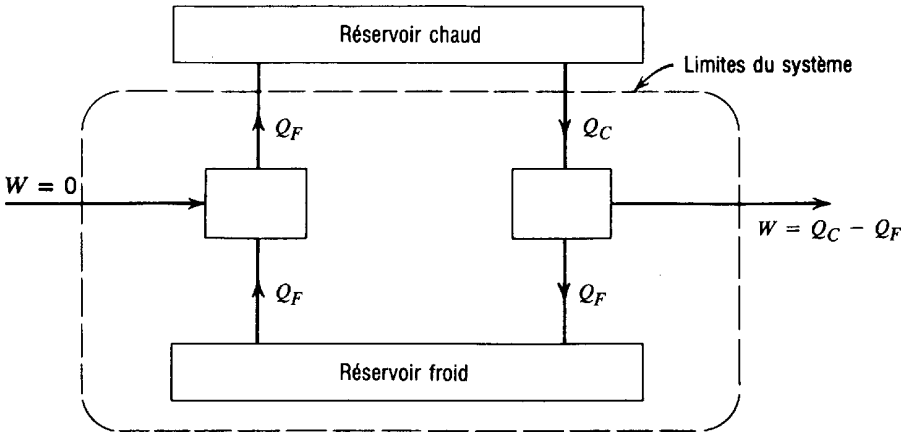


FIG. 6.5 – énoncé de Clausius et énoncé de Kelvin-Planck

$W = Q_C - Q_F$ en recevant une quantité de chaleur Q_C de la source froide et en rejetant Q_F à la source froide.

Alors le système composé des deux machines et de la source froide est un système qui fournit un travail en échangeant de la chaleur avec la seule source chaude, ce qui viole l'énoncé de Kelvin-Planck.

Semblablement, la violation de l'énoncé de Kelvin-Planck entraîne la violation de l'énoncé de Clausius, dont il résulte l'équivalence des deux énoncés.

6.2.2 Impossibilité des mouvements perpétuels

L'impossibilité de transformer intégralement une quantité de chaleur en travail entraîne l'impossibilité de créer un *mouvement perpétuel de deuxième espèce*, à savoir un système qui produirait du travail en puisant de la chaleur dans une source gratuite. Si c'était possible, en effet, un tel système, pouvant p. ex. servir à la propulsion d'un navire, pourrait être réalisé de la manière suivante.

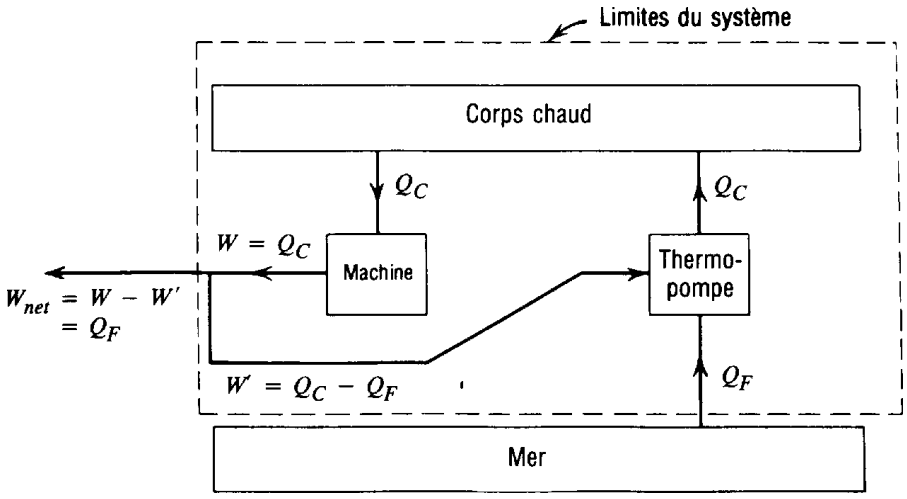


FIG. 6.6 – Impossibilité des mouvements perpétuels

6.2.3 Classification et dégradation de l'énergie

Le second principe établit en quelque sorte une hiérarchie entre les diverses formes d'énergie. Alors qu'un travail peut être intégralement transformé en chaleur, l'inverse n'est pas vrai. Le travail est donc une forme d'énergie plus « noble »que la chaleur.

D'autre part, la chaleur cédée à la source froide par une machine thermique n'a pas la même valeur que la même quantité puisée à la source froide, puisqu'elle ne peut plus être transformée en travail, ce que l'on exprime en disant qu'elle est dégradée.

Le second principe exprime donc la tendance de l'énergie à se transformer en formes plus dégradées.

6.3 Les transformations réversibles

Ayant démontré que l'efficacité thermique d'une machine thermique est nécessairement inférieure à l'unité, la question se pose de savoir quelle est l'efficacité maximum que l'on puisse atteindre.

Pour répondre à cette question, définissons tout d'abord la notion de *transformation réversible*. Comme son nom l'indique, une transformation réversible sera définie comme une transformation qui peut être décrite en sens inverse, de sorte qu'après avoir été décrite successivement dans les deux sens, tant le système considéré que le milieu extérieur se retrouvent exactement dans le même état qu'initialement. Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'au cours de la transformation inverse,

1. les variables d'état repassent exactement par les mêmes valeurs que lors de la transformation initiale ;
2. les échanges d'énergie avec le milieu extérieur soient exactement opposés à ceux effectués lors de la transformation initiale.

Illustrons cette définition par les exemples suivants :

a) Transformation irréversible

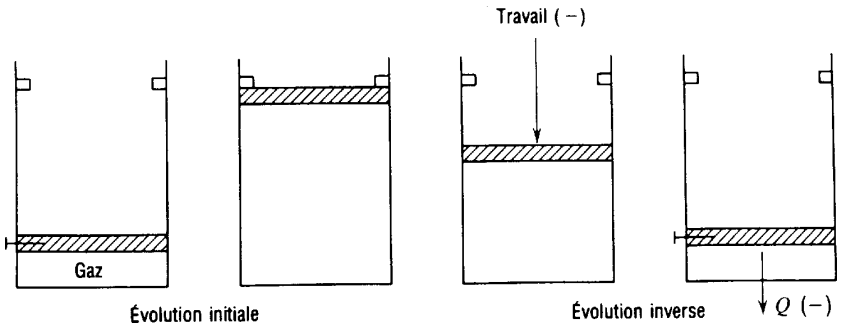


FIG. 6.7 – Transformation irréversible

b) Transformation réversible

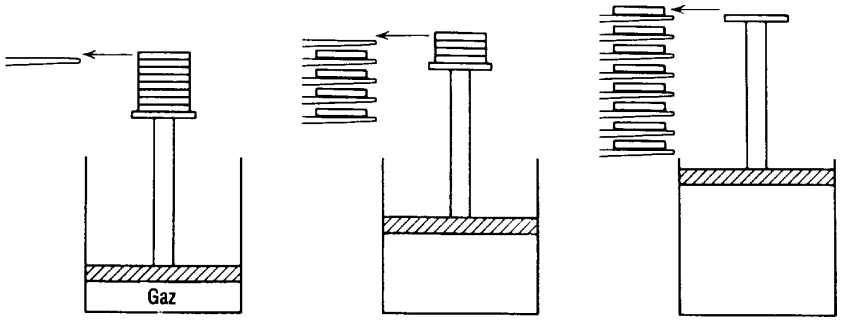


FIG. 6.8 – Transformation réversible

6.4 Les sources d'irréversibilité

6.4.1 Les frottements

Les frottements sont responsables d'une transformation de travail en chaleur, qui est par nature irréversible. On les rencontre lors du mouvement relatif de deux corps solides en contact l'un avec l'autre, mais aussi au sein des écoulements fluides par l'effet des contraintes visqueuses.

6.4.2 La détente libre

La détente libre est la transformation déjà décrite à la section 4.4 par laquelle un gaz se répand dans un volume initialement évacué après la rupture de la membrane qui l'en séparait.

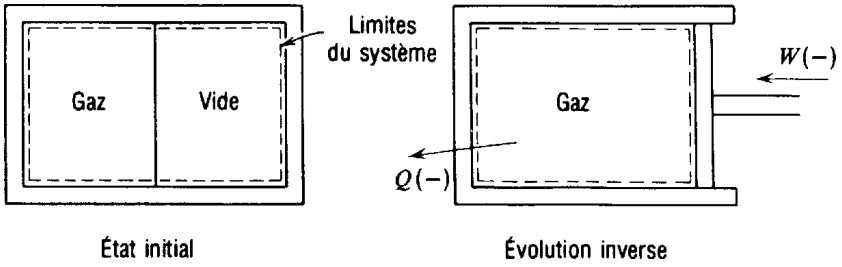


FIG. 6.9 – La détente libre

Cette transformation est manifestement irréversible puisqu'on ne peut ramener le gaz dans son état initial que par apport de travail et cession de chaleur.

6.4.3 L'échange de chaleur entre deux sources

Supposons qu'une quantité de chaleur soit transférée d'une source chaude à une source froide. Il s'agit manifestement d'une transformation irréversible puisque, pour transférer la même quantité de chaleur en sens inverse, il faut nécessairement fournir du travail (énoncé de Clausius).

Comme un transfert de chaleur résulte d'une différence de température, et qu'on vient de voir que l'échange de chaleur entre deux sources de température différente est irréversible, il s'ensuit qu'il ne peut exister de transfert de chaleur réversible qu'entre deux sources de température entre lesquelles il n'existe qu'une différence de température infinitésimale.

6.4.4 Autres sources d'irréversibilité

Il existe encore bien d'autres sources d'irréversibilité : le mélange de deux substances différentes, l'effet Joule, les phénomènes d'hystérésis magnétique, les réactions chimiques, dont la combustion...

Il importe enfin de relever les liens étroits entre réversibilité, équilibre thermodynamique et rapidité des transformations. Pour qu'une transformation soit réversible, il faut qu'à chaque instant (et en chaque point) les écarts par rapport à l'équilibre (mécanique et thermique) soient infinitésimaux, et donc que la vitesse de transformation soit infinitésimale, puisque c'est toujours un déséquilibre qui cause une évolution. C'est précisément la caractéristique des transformations quasi-statiques définies à la section 2.4. Pour être réversible, une transformation doit donc être quasi-statique.

Puisque les transformations réelles s'effectuent à vitesse finie, il s'ensuit que les écarts à l'équilibre ne peuvent pas être infinitésimaux, et que par conséquent les transformations réelles sont toutes irréversibles à un certain point. Plus les écarts à l'équilibre sont grands, plus une transformation est rapide, et plus elle est irréversible.

6.5 Le cycle de Carnot

Soit une machine thermique fonctionnant entre une source chaude et une source froide, et décrivant un cycle dont toutes les transformations qui le composent sont réversibles. Il en résulte que le cycle est lui aussi réversible. Un tel cycle est appelé *cycle de Carnot*, et nous allons bientôt montrer que c'est le cycle le plus efficace qui puisse fonctionner entre les deux sources.

Un tel cycle de Carnot est schématisé ci-après, sous la forme d'une machine à écoulement permanent de fluide semblable à la centrale thermique schématisée à la section 6.1.

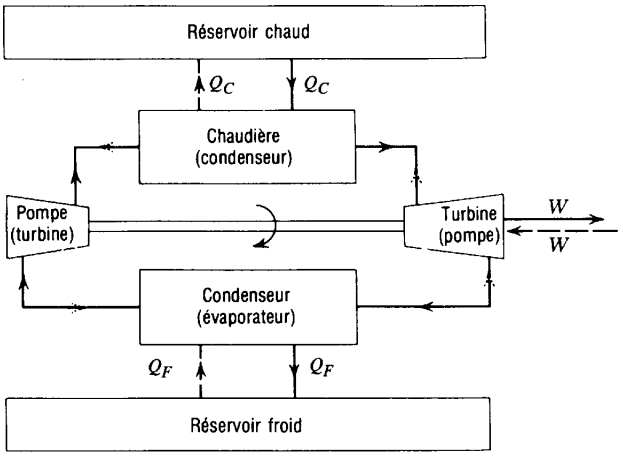


FIG. 6.10 – Le cycle de Carnot

Le cycle se compose des transformations suivantes :

- Dans la chaudière, le fluide actif reçoit de la chaleur fournie par la source chaude. Puisque l'échange de chaleur doit être réversible, la température du fluide doit être égale à celle de la source chaude : la transformation est donc *isotherme et réversible*.
- Dans la turbine, le fluide subit une détente *adiabatique et réversible* en fournissant du travail. Au cours de cette transformation, sa température diminue de la température de la source chaude à celle de la source froide.
- Dans le condenseur, il cède de la chaleur à la source froide. Pour les mêmes raisons que dans la chaudière, il doit s'agir d'une transformation isotherme et réversible.
- Enfin, il subit une compression adiabatique et réversible dans le compresseur, au cours de laquelle sa température augmente jusqu'à la température de la source chaude.

Puisque le cycle de Carnot est réversible, il peut être décrit dans le sens inverse, auquel cas le système devient une machine frigorifique de Carnot.

Remarquons que le cycle de Carnot peut être réalisé de diverses manières. Ainsi, on pourrait le réaliser à l'aide d'un dispositif cylindre/piston comme illustré ci-dessous.

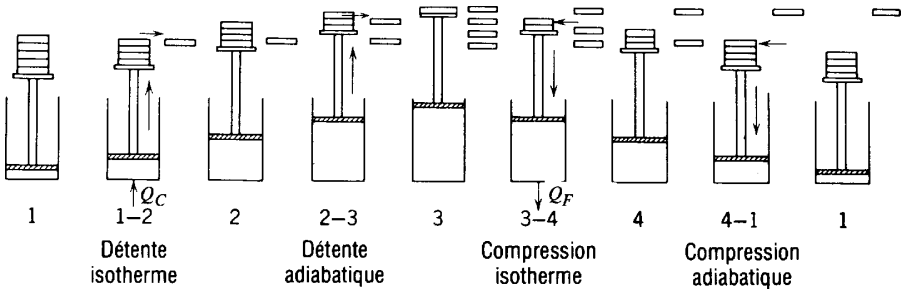


FIG. 6.11 – dispositif cylindre/piston

Remarquons que, dans ce cas, on aurait également échange de travail lors des phases de chauffage et de refroidissement.

6.6 Deux propriétés des cycles de Carnot

Proposition 1 : *Il est impossible de réaliser une machine fonctionnant entre deux sources qui serait plus efficace qu'une machine réversible fonctionnant entre les deux mêmes sources.*

Cette proprosition se démontre par l'absurde. Supposons qu'une telle machine existe. On considère ici le cas d'une machine thermique, mais le raisonnement peut être répété pour une machine frigorifique. Soit Q_C la chaleur reçue à la source chaude et $W^*_{\text{M.I.}}$ le travail fourni, supposé plus grand que le travail $W^*_{\text{M.R.}}$ fourni par la machine réversible recevant la même quantité de chaleur de la source chaude.

Alors, le système formé de la machine irréversible hypothétique, de la machine réversible fonctionnant en sens inverse (ce qui est possible puisqu'elle est réversible) et de la source chaude violerait la proposition de Kelvin-Planck, comme illustré ci-après.

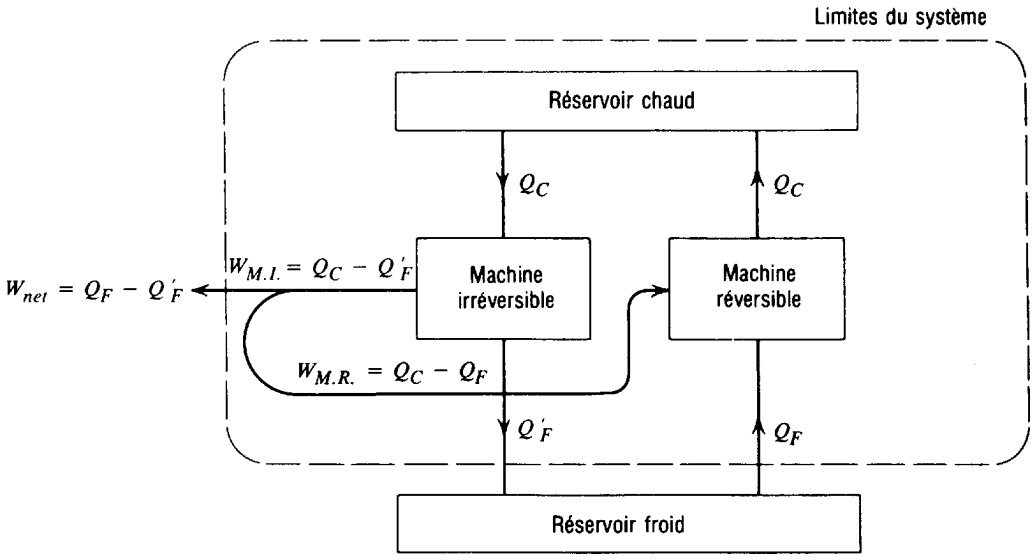


FIG. 6.12 – violation la proposition de Kelvin-Planck

Proposition 2 : *Toutes les machines décrivant un cycle de Carnot entre deux sources ont la même efficacité.*

Cette proposition se démontre de la même manière que la première.

6.7 L'échelle de température thermodynamique

Puisque toutes les machines décrivant un cycle de Carnot entre deux sources ont la même efficacité, il s'ensuit que cette efficacité ne peut dépendre *que des températures de ces sources*, indépendamment de tout thermomètre particulier. Cette observation permet de définir une échelle absolue de température, notée T.

Mathématiquement, la propriété précédente s'écrit

$$(\varepsilon_{\text{th}})_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{Q_F^*}{Q_C} = 1 - \psi(T_F, T_C) \tag{6.4}$$

où T_C et T_F sont les températures des sources dans l'échelle absolue de température, qui reste à définir.

Considérons à présent trois sources de températures T_1, T_2 et T_3 telles que $T_1 > T_2 > T_3$ et les cycles de Carnot moteurs entre ces sources prises deux à deux.

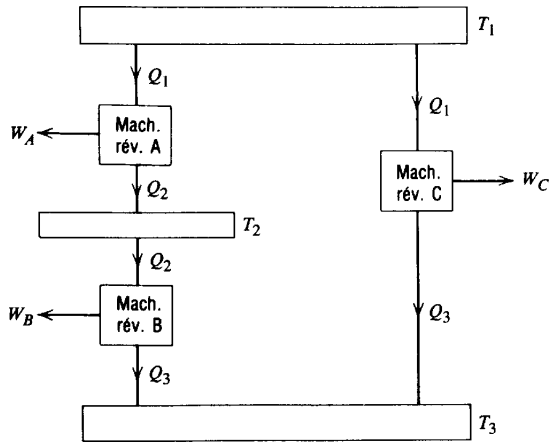


FIG. 6.13 – cycles de Carnot moteurs entre 3 sources

Selon la définition précédente, on a

$$1 - \varepsilon_{\text{th},A} = \frac{Q_2}{Q_1} = \psi(T_2, T_1), \quad 1 - \varepsilon_{\text{th},B} = \frac{Q_3}{Q_2} = \psi(T_3, T_2), \quad 1 - \varepsilon_{\text{th},C} = \frac{Q_3}{Q_1} = \psi(T_3, T_1)$$

dont il résulte que

$$\psi(T_2, T_1)\psi(T_3, T_2) = \psi(T_3, T_1) \tag{6.5}$$

Il s'ensuit que la fonction $\psi(x, y)$ doit être de la forme

$$\psi(x, y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

et donc, d'après la définition

$$\frac{Q_F^*}{Q_C} = \frac{f(T_F)}{f(T_C)} \tag{6.6}$$

Qui plus est, nous pouvons affirmer que la fonction f doit être de signe constant et croissante, puisque dans l'exemple

$$\frac{Q_3}{Q_1} < \frac{Q_2}{Q_1}$$

N'importe quelle fonction f qui satisfait ces deux propriétés peut alors servir de définition à une échelle absolue de température.

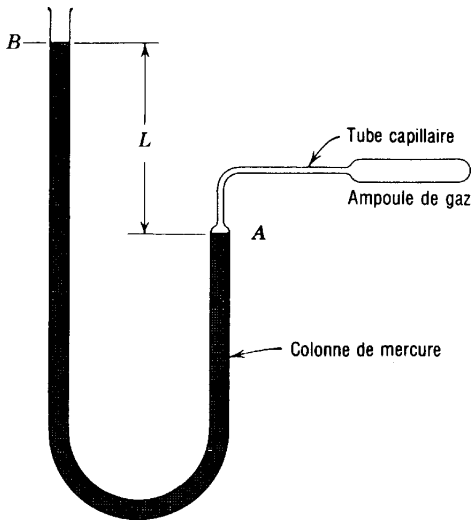
L'échelle communément utilisée consiste à adopter une forme linéaire pour f, $f(T) \equiv aT$. La constante de proportionnalité étant quelconque, on peut la choisir arbitrairement. Une manière de la choisir est de faire en sorte que la différence de température entre deux points fixes soit identique à sa valeur dans une échelle conventionnelle choisie. Ainsi, l'échelle absolue telle que la différence de température entre le point d'ébullition et de solidification de l'eau à pression atmosphérique soit égale à 100 comme dans l'échelle centigrade, est l'échelle Kelvin.

Comme l'efficacité thermique d'un cycle de Carnot entre deux sources à ces températures vaut 0,268, on en déduit que $T_{\text{glace}} = 273,15$ K.

Puisque la fonction f doit être de signe constant, on en déduit que, pour ce choix d'une forme linéaire de la fonction f, la température ne peut devenir négative, d'où la notion de *zéro absolu* [3].

Comme il est en pratique malaisé de mesurer l'efficacité d'un cycle de Carnot, on fixe plutôt la constante arbitraire de l'échelle thermodynamique absolue en attribuant une valeur à un point fixe donné, à savoir 273,16 K pour le point triple de l'eau.

On peut mesurer la température thermodynamique à l'aide d'un thermomètre à gaz à volume constant, dont le principe est illustré dans le schéma suivant.



Comme on l'a indiqué à la section 3.13, les gaz à faible pression obéissent à la relation d'état

$$pv = RT^4$$

L'ampoule de gaz est placée à l'endroit où la température doit être mesurée, et la colonne de mercure est ajustée de manière à son niveau se maintienne à la marque A. Dans ces conditions, le volume de gaz est constant, et par conséquent $p \propto T$, et la mesure de p permet de déterminer T.

FIG. 6.14 – thermomètre à gaz à volume constant

[3]Comme on l'a fait remarquer, le choix de la forme linéaire pour la fonction f n'est pas le seul possible. A titre anecdotique, on mentionnera que Kelvin avait aussi proposé une forme exponentielle $f(\text{« } T \text{ »}) \equiv 10^{\text{« } T \text{ »}}$. Dans cette échelle alternative, les températures varient de $-\infty$ à $+\infty$. Comme dans l'échelle communément utilisée, $f(T) = aT$, on a

$$\text{« } T \text{ »} = \log T + \log a$$

[4]On aura sans doute relevé que l'on avait formulé cette relation alors qu'on avait pas encore défini la notion de température absolue. Il aurait sans doute été plus rigoureux à ce stade de se contenter d'exprimer la loi de

En mesurant la semblablement la pression correspondant à la température du point triple de l'eau, on a alors

$$T = 273,16 \frac{p}{p_{\text{p.t.}}}$$

Bien sur, en pratique, les gaz ne sont pas exactement parfaits. C'est seulement à la limite d'une pression tendant vers 0 qu'ils se comportent comme tels. En mesurant les pressions pour différentes quantités de gaz et, en portant la valeur de température déduite de ces mesures en fonction du niveau de pression, la température thermodynamique s'obtient par extrapolation des valeurs pour une pression nulle.

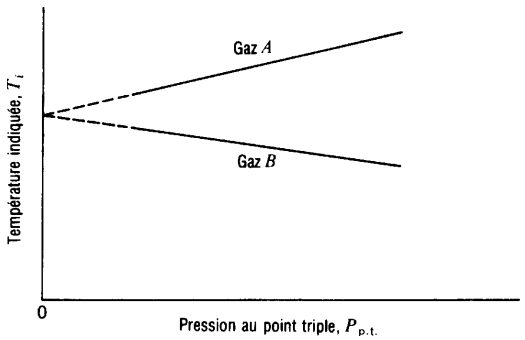


FIG. 6.15 – température thermodynamique

Boyle-Mariotte $pv = f(\theta)$, en attendant le présent chapitre pour expliciter $f(\theta) = RT$.

Par ailleurs, on peut montrer que cette dernière expression résulte de la loi de Boyle-Mariotte, de la loi de Joule $u = f(\theta)$, et de la définition de la température thermodynamique qui vient d'être donnée.

Chapitre 7

L'entropie

Au chapitre précédent, on s'est limité à l'étude des cycles thermodynamiques. On va maintenant étendre la discussion au cas des transformations ouvertes.

De plus, on n'a donné jusqu'à présent qu'une formulation qualitative du second principe. On peut aussi, et cela s'avère intéressant en pratique, en donner une formulation quantitative.

Ce faisant, on introduira une nouvelle variable thermodynamique, l'entropie, tout comme le premier principe nous avait conduit à introduire la variable énergie.

7.1 L'inégalité de Clausius

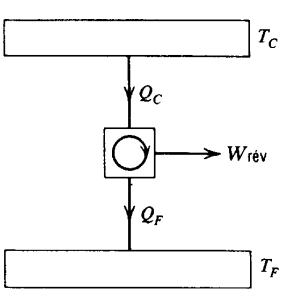
L'inégalité de Clausius est un corollaire du second principe qui s'exprime comme suit.

Pour tout système fermé à température uniforme décrivant un cycle,

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \tag{7.1}$$

où δQ est la quantité de chaleur reçue sur un élément de cycle, et T la température du système à l'état correspondant.

On va à présent vérifier la validité de l'expression pour les machines thermiques et frigorifiques, réversibles et irréversibles. Commençons par une machine thermique réversible. Comme une telle machine peut être obtenue par combinaison de cycles de Carnot, on se contentera de vérifier la validité de (7.1) pour un cycle de Carnot.



Comme un cycle de Carnot est réversible, les échanges de chaleur sont isothermes, à la température de la source avec laquelle s'effectue l'échange. Il en résulte que

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F^*}{T_F} = 0$$

FIG. 7.1 – machine thermique réversible

Considérons à présent un cycle parcourant le même chemin thermodynamique et prélevant la même quantité de chaleur à la source chaude Q_C, mais dont certaines parties sont parcourues de manière irréversible. Le cycle étant irréversible, $W^*_{\text{irr}} < W^*_{\text{rév}}$, et donc $Q^*_{F,\text{irr}} > Q^*_{F,\text{rév}}$.

Il en résulte

$$\int_C \frac{\delta Q}{T} = \int_C \frac{\delta Q}{T_C} = \frac{Q_C}{T_C}, \qquad \int_F \frac{\delta Q^*}{T} = \int_F \frac{\delta Q^*}{T_F} = \frac{Q^*_{F,\text{irr}}}{T_F} > \frac{Q^*_{F,\text{rév}}}{T_F}$$

et, en soustrayant

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_C \frac{\delta Q}{T} - \int_F \frac{\delta Q^*}{T} < \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q^*_{F,\text{rév}}}{T_F} = 0 \tag{7.2}$$

Semblablement, comme un cycle de Carnot frigorifique n'est rien d'autre qu'un cycle de Carnot thermique inversé, il satisfait aussi

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_F}{T_F} - \frac{Q^*_C}{T_C} = 0$$

Pour le cycle frigorifique parcourant le même chemin thermodynamique et prélevant la même quantité de chaleur à la source froide Q_F, mais dont certaines parties sont parcourues de manière irréversible, $W_{\text{irr}} > W_{\text{rév}}$, et donc $Q^*_{C,\text{irr}} > Q^*_{C,\text{rév}}$.

Il en résulte

$$\int_F \frac{\delta Q}{T} = \int_F \frac{\delta Q}{T_F} = \frac{Q_F}{T_F}, \qquad \int_C \frac{\delta Q^*}{T} = \int_C \frac{\delta Q^*}{T_C} = \frac{Q^*_{C,\text{irr}}}{T_C} > \frac{Q^*_{C,\text{rév}}}{T_C}$$

et, en soustrayant

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_F \frac{\delta Q}{T} - \int_C \frac{\delta Q^*}{T} < \frac{Q_F}{T_F} - \frac{Q^*_{C,\text{rév}}}{T_C} = 0 \tag{7.3}$$

ce qui complète la démonstration de la proposition (pour le cas particulier des cycles comportant des échanges de chaleur isothermes).

La généralisation au cas des cycles comportant des échanges de chaleur non isothermes ne pose pas de difficultés majeures.

7.2 L'entropie

Considérons deux cycles réversibles composés respectivement des transformations A et B, et A et C.

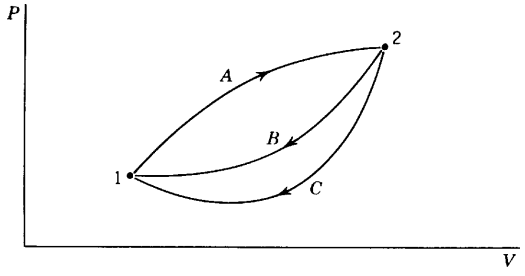


FIG. 7.2 – deux cycles réversiblescomposés respectivement des transformations A et B, et A et C

Puisque les deux cycles sont réversibles,

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B = 0$$

et

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_C = 0$$

En soustrayant, on déduit

$$\int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B = \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_C = 0$$

et l'on voit que l'intégrale ne dépend pas du chemin parcouru (pour autant que la transformation soit réversible) et par conséquent que $(\delta Q/T)_{\text{rév}}$ est une différentielle exacte.

On désigne par le symbole S la fonction dont la différentielle

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rév}} \tag{7.4}$$

et on lui donne le nom d'*entropie* du système. Par construction, il s'agit d'une variable d'état.

En intégrant de l'état initial 1 jusqu'à l'état final 2 (p. ex. en suivant le chemin A), on aura donc

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{rév}} \tag{7.5}$$

Remarques

- Bien que pour calculer la variation d'entropie entre deux états 1 et 2, on doive intégrer $\delta Q/T$ le long d'une transformation réversible, l'entropie étant une variable d'état, la différence d'entropie entre deux états est indépendante non seulement du chemin parcouru, mais aussi de la nature (réversible ou non) de la transformation subie.
- Tout comme l'énergie, l'entropie n'est définie par l'équation (7.5) qu'à une constante près. La valeur absolue de l'entropie n'est fixée que d'après *le troisième principe de la thermodynamique* qui stipule que l'entropie d'une substance pure est nulle au zéro absolu des températures.
  La valeur absolue de l'entropie n'est toutefois nécessaire qu'en cas de changement de composition, c.-à-d. en cas de réactions chimiques.

7.3 L'entropie d'une substance pure

L'entropie définie à la section précédente est une variable extensive. Il lui correspond la variable intensive entropie massique s. Tout comme le volume massique et l'enthalpie, sa valeur est fournie dans les tables thermodynamiques des substances pures. La valeur nulle est attribuée conventionnellement à un état de référence particulier. Pour l'eau, il s'agit de l'état liquide au point triple.

Tout comme pour toutes les autres variables massiques, l'entropie massique d'un mélange saturé est lié au titre par la relation

$$s = (1 - x)s_l + xs_g = s_l + x(s_g - s_l)$$

Comme on l'a déjà mentionné plusieurs fois, on représente souvent les propriétés thermodynamiques d'une substance dans un diagramme thermodynamique,p. ex. le diagramme $p-v$. Deux diagrammes faisant intervenir l'entropie sont fréquemment utilisés, à savoir le diagramme $T-s$, souvent appelé diagramme entropique ou diagramme de Stodola, et le diagramme $h-s$ appelé diagramme de Mollier.

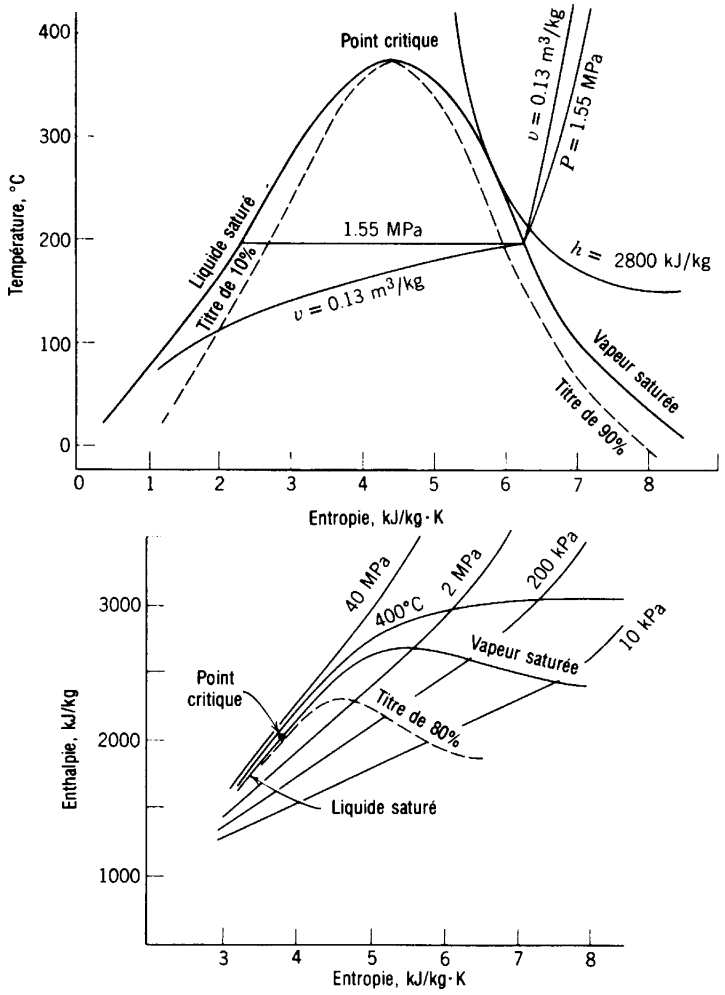


FIG. 7.3 – le diagramme $T-s$, appelé diagramme entropique ou diagramme de Stodola, et le diagramme $h-s$ appelé diagramme de Mollier

7.4 Les variations d'entropie au cours de transformations réversibles

7.4.1 Le cycle de Carnot

Comme on l'a vu précédemment, le cycle de Carnot se décompose en 4 transformations, que nous allons examiner successivement.

Chauffage isotherme Dans cette transformation, on a

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{{}_1Q_2}{T_C}$$

Dans le diagramme entropique, elle est représentée par l'horizontale $1-2$. On en déduit

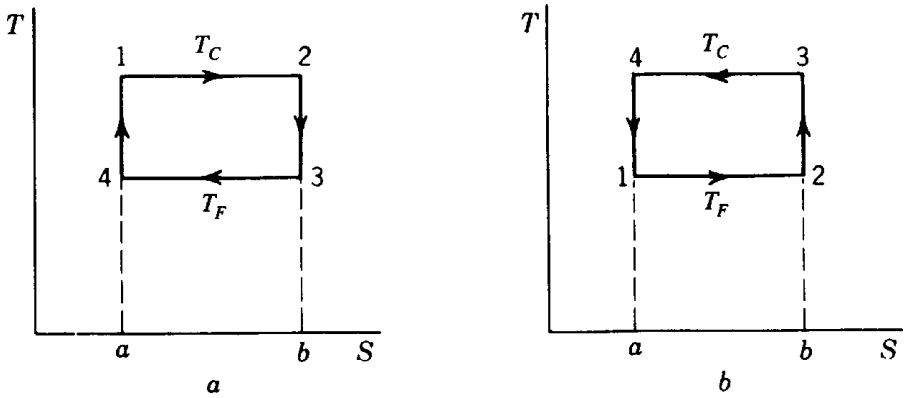


FIG. 7.4 – diagramme entropique

que la chaleur échangée ${}_1Q_2 = T_C(S_2 - S_1)$ est l'aire $1-2-b-a-1$.

Détente adiabatique Cette transformation étant adiabatique et réversible, $dS = \delta Q/T = 0$, et donc l'entropie reste constante. Cette transformation, représentée par le segment vertical $2-3$ dans le diagramme entropique, est appelée *isentropique*.

Refroidissement isotherme Comme pour la transformation $1-2$, on a

$$S_4 - S_3 = \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} = \frac{{}_3Q_4}{T_F}$$

grandeur qui est *négative* puisque ${}_3Q_4 < 0$. La chaleur cédée à la source froide $Q_F^* = -{}_3Q_4$ est l'aire $3-4-a-b-3$.

Compression adiabatique Il s'agit de nouveau d'une isentropique, représentée par le segment vertical $4-1$.

Le travail net du cycle W^* étant égal à la chaleur nette reçue, il est représenté dans le diagramme entropique par l'aire $1-2-3-4$, de sorte qu'on peut exprimer le rendement thermique comme un rapport de deux aires

$$\varepsilon_{\text{th}} = \frac{W^*}{Q_C} = \frac{\text{aire } 1-2-3-4-1}{\text{aire } 1-2-b-a-1}$$

En inversant le sens de parcours, on obtient le cycle de Carnot frigorifique.

7.4.2 Le chauffage isobare

On considère à nouveau le cas du chauffage isobare d'une masse de fluide, tel que représenté à la section 3.2, à partir de l'état de liquide saturé. On suppose la transformation réversible du point de vue interne. La variation d'entropie massique entre l'état de liquide saturé et de vapeur saturée est dès lors

$$s_2 - s_1 = s_g - s_l = \frac{1}{m}\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{m}\int_1^2 \delta Q = \frac{{}_1q_2}{T} = \frac{h_g - h_l}{T}$$

puisque pour une transformation isobare d'un système fermé, la chaleur échangée est égale à la variation d'enthalpie (section 5.5).

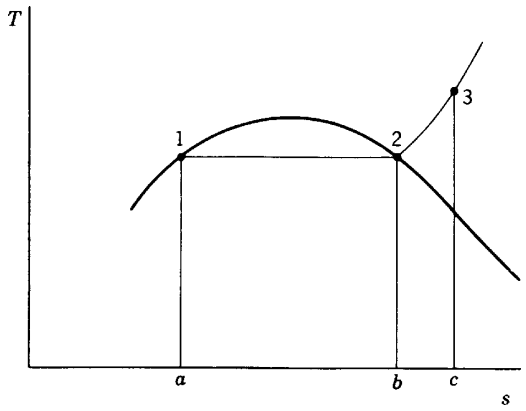


FIG. 7.5 – diagramme $T - s$ pour un chauffage isobare

Vu la relation précédente, cette chaleur est représentée par l'aire $1 - 2 - b - a - 1$.

Si l'on poursuit le chauffage à l'état de vapeur (transformation $2 - 3$), on peut écrire pour cette transformation

$$_2q_3 = \int_2^3 T\mathrm{d}s$$

A moins de connaître la variation de s avec T, cette expression ne peut être intégrée, mais elle est représentée par l'aire sous la courbe $2 - 3$, soit l'aire $2 - 3 - c - b - 2$.

7.5 Deux relations thermodynamiques importantes

Nous pouvons maintenant établir deux relations thermodynamiques importantes. Si l'on considère une transformation réversible d'un système fermé, sans variation d'énergies cinétique et potentielle, on a, par le premier principe

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$$

Mais, par ailleurs, la transformation étant réversible (et donc quasi-statique)

$$\delta W = -p\mathrm{d}V \qquad \delta Q = T\mathrm{d}S$$

On en déduit que pour une telle transformation

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V \tag{7.6}$$

A ce stade toutefois, cette relation ne fait intervenir que des variables d'état et doit par conséquent être valable pour une transformation infinitésimale irréversible aussi bien que pour une transformation infinitésimale réversible — pour autant toutefois que la notion d'état conserve un sens, ce qui implique que le système reste proche de l'équilibre. Par conséquent, on peut intégrer l'équation (7.6) entre deux états, que la transformation soit réversible ou non[1].

[1]Bien sur, pour pouvoir effectuer l'intégration, il faut connaître le chemin suivi, ce qui, en toute rigueur, ne peut être défini que pour une transformation quasi-statique, et donc réversible.

En vertu de la définition de l'enthalpie, $H = U + pV$, on a en différentiant

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p \tag{7.7}$$

On en déduit les formes massiques

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}h &= T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{7.8}$$

dont on fera un grand usage dans le reste du cours.

7.6 Transformations ouvertes irréversibles de systèmes fermés

Considérons un système fermé décrivant les cycles représentés ci-dessous

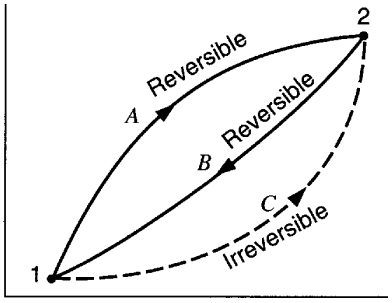


FIG. 7.6 – Transformations ouvertes irréversibles de systèmes fermés

Le cycle composé des transformations A et B étant réversible, on a

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B = 0$$

Par ailleurs, pour le cycle irréversible composé de la transformation irréversible C et de la transformation irréversible B, l'inégalité de Clausius s'écrit

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_C + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B < 0$$

On en déduit

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_C < \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A = \int_1^2 \mathrm{d}S = S_2 - S_1$$

Rassemblant les résultats pour les cas réversible et irréversible, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q}{T} &\leq \mathrm{d}S \\ \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} &\leq S_2 - S_1 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Remarquons que ces deux relations sont applicables quel que soit le signe de δQ. Si δQ est négative, cela contribue à faire diminuer l'entropie, mais les irréversibilités contribuent toujours à faire croître l'entropie.

A quantité de chaleur échangée constante, la variation d'entropie est toujours plus élevée pour une transformation irréversible que pour une transformation réversible. A parcours thermodynamique identiques, la chaleur reçue pour une transformation réversible est toujours *plus faible* que pour la transformation réversible correspondante.

7.7 Le travail non compensé

On peut mettre en évidence l'importance des irréversibilités en introduisant la notion de *travail non compensé* ou encore travail perdu, que l'on notera W_i^*. Considérons à cet effet le système constitué du gaz contenu dans une partie du réservoir et séparé par une membrane du vide contenu dans l'autre.

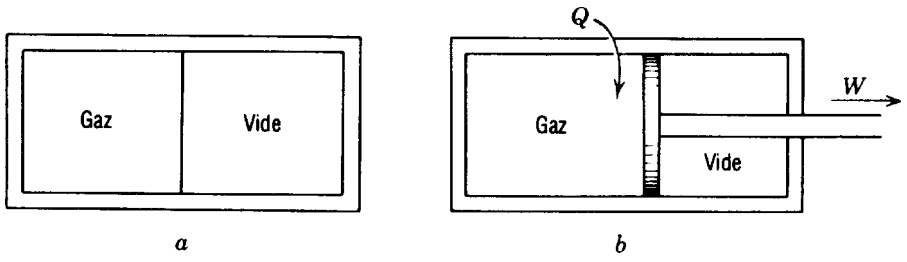


FIG. 7.7 – Le travail non compensé

On perce une ouverture dans la membrane de manière à ce que le gaz se répande lentement dans tout le réservoir, tout en recevant une quantité de chaleur telle que la température reste constante tout au cours de la transformation. Il est clair qu'aucun travail n'est échangé au cours de cette transformation.

Comparons cette transformation avec la transformation réversible représentée en b. Pour cette évolution réversible

$$\delta Q = T\mathrm{d}S \qquad \delta W^* = p\mathrm{d}V$$

On constate que le travail fourni par le système lors de la transformation irréversible est moindre que celui qu'aurait fourni la transformation réversible : du travail a été en quelque sorte « perdu ».

$$(\delta W^*)_{\mathrm{irr}} = p\mathrm{d}V - \delta W_i^* \tag{7.10}$$

En vertu du premier principe $\delta Q + \delta W = \mathrm{d}U$, et de la relation de Gibbs (7.6)

$$(\delta Q)_{\mathrm{irr}} = (\delta W^*)_{\mathrm{irr}} + \mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - \delta W_i^*$$

et l'on voit que la chaleur reçue est moindre que celle reçue pour une transformation réversible. La différence, que l'on appelle *chaleur non compensée* est égale au travail non compensé.

Résolvant la relation précédente pour $\mathrm{d}S$, on obtient

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} + \frac{\delta W_i^*}{T} \tag{7.11}$$

à rapprocher de l'inégalité

$$\mathrm{d}S \geq \frac{\delta Q}{T} \tag{7.12}$$

établie précédemment. La différence entre dS et $\delta Q/T$ est l'augmentation d'entropie due aux irréversibilités

$$\mathrm{d}S_i = \frac{\delta W_i^*}{T} \tag{7.13}$$

appelée *production d'entropie.*

Conséquences

- La variation d'entropie d'un système au cours d'une transformation résulte de deux effets, à savoir *les échanges de chaleur* avec le milieu extérieur, et les irréversibilités.
- Les échanges de chaleur peuvent conduire, selon leur signe, à une augmentation ou à une diminution de l'entropie d'un système.
- Les irréversibilités sont toujours responsables d'une augmentation d'entropie.
- Alors que pour une transformation réversible, les aires sous les courbes représentant la transformation dans les diagrammes $T - s$ et $p - v$ sont égales à la chaleur échangée et au travail fourni respectivement, il n'en est plus de même pour une transformation irréversible.
  D'ailleurs, comme on l'a mentionné précédemment, on ne peut pas à proprement parler définir les états intermédiaires d'une transformation irréversible puisque la notion d'état implique l'équilibre et que l'irréversibilité d'une transformation va de pair avec un écart par rapport à l'équilibre. C'est la raison pour laquelle il est préférable de représenter les transformations irréversibles par des pointillés dans les diagrammes thermodynamiques.

7.8 Le principe de l'accroissement de l'entropie

Considérons un système fermé subissant une transformation infinitésimale. Au cours de cette transformation, il reçoit une certaine quantité de chaleur δQ du milieu extérieur et fournit un travail δW^*.

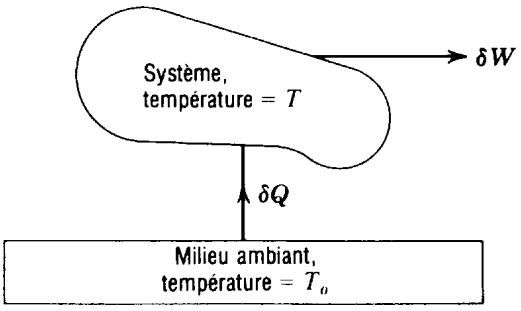


FIG. 7.8 – principe de l'accroissement de l'entropie

Supposons qu'au cours de cette transformation, le système soit à une température T et que le mileu extérieur soit à une température $T_0 > T$. Pour le système, on a

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{sys}} \geq \frac{\delta Q}{T}$$

alors que pour le milieu extérieur,

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{ext}} = -\frac{\delta Q}{T_0}$$

puisque, si on le considère comme une source, l'échange de chaleur ne modifie pas sa température, et donc la transformation est réversible.

Sommant les deux variations d'entropie, on a

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{tot}} = \mathrm{d}S_{\mathrm{sys}} + \mathrm{d}S_{\mathrm{ext}} \geq \frac{\delta Q}{T} - \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{\delta Q}{T}(1 - \frac{T}{T_0}) > 0 \tag{7.14}$$

Si l'on suppose au contraire que $T < T_0$, alors l'échange de chaleur est dans le sens contraire, c.-à-d. $\delta Q < 0$, et l'on a de même

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{tot}} = \mathrm{d}S_{\mathrm{sys}} + \mathrm{d}S_{\mathrm{ext}} \geq 0 \tag{7.15}$$

de sorte que la variation d'entropie de l'ensemble système + milieu extérieur est toujours positive.

Ce résultat est connu sous le nom de *principe d'accroissement de l'entropie*. Il indique que les seules transformations possibles sont celles pour lesquelles l'entropie globale augmente (voire reste constante). Sauf pour ce cas limite, la transformation inverse qui ramènerait le système et le mileu extérieur dans son état initial est impossible.

L'accroissement global d'entropie peut se décomposer entre contributions interne et externe. La variation d'entropie du système pouvant s'écrire selon la relation (7.11)

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{sys}} = \frac{\delta Q}{T} + \mathrm{d}S_i$$

où $\mathrm{d}S_i$ est la production d'entropie due aux irréversibilités internes, on a

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{tot}} = \mathrm{d}S_i + \underbrace{\frac{\delta Q}{T}(1 - \frac{T}{T_0})}_{\mathrm{d}S_e} = \mathrm{d}S_i + \mathrm{d}S_e$$

$\mathrm{d}S_e$ étant la production d'entropie externe due à l'irréversibilité de l'échange de chaleur avec le milieu extérieur.

7.9 L'entropie d'un solide ou d'un liquide

A la section 5.6, on a vu que, pour les liquides et les solides,

$$\mathrm{d}h \approx \mathrm{d}u \approx c\mathrm{d}T$$

où c est la chaleur massique.

Comme par ailleurs, $\mathrm{d}u = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v$ (et $\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p$), on a, en négligeant à nouveau les termes faisant intervenir le volume massique,

$$\mathrm{d}s \approx \frac{\mathrm{d}u}{T} \approx c\frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{7.16}$$

La chaleur massique des solides et des liquides étant approximativement constante, on peut intégrer cette expression et l'on obtient

$$s_2 - s_1 \approx c \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \tag{7.17}$$

7.10 L'entropie d'un gaz parfait

L'entropie d'un gaz parfait s'obtient directement des équations de Gibbs (7.8), des expressions de l'énergie interne et de l'enthalpie, et de la loi des gaz parfaits.

$$T\mathrm{d}s = \mathrm{d}u + p\mathrm{d}v = c_v\mathrm{d}T + p\mathrm{d}v$$

d'où, en divisant par T

$$\mathrm{d}s = c_v\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{p}{T}\mathrm{d}v = c_v\frac{\mathrm{d}T}{T} + R\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{7.18}$$

et l'on obtient en intégrant

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_v\frac{\mathrm{d}T}{T} + R\ln\frac{v_2}{v_1} \tag{7.19}$$

Semblablement,

$$T\mathrm{d}s = \mathrm{d}h - v\mathrm{d}p = c_p\mathrm{d}T - v\mathrm{d}p$$

d'où, en divisant par T

$$\mathrm{d}s = c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{v}{T}\mathrm{d}p = c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} - R\frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{7.20}$$

et l'on obtient en intégrant

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} - R\ln\frac{p_2}{p_1} \tag{7.21}$$

Avec l'approximation de chaleurs massiques constantes, ces deux expressions s'intègrent analytiquement

$$s_2 - s_1 = c_v\ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{v_2}{v_1} \tag{7.22}$$

$$s_2 - s_1 = c_p\ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} \tag{7.23}$$

Si l'on tient compte des variations des chaleurs massiques avec la température, on peut calculer une fois pour toutes les intégrales et les tabuler en fonction de la température, p. ex.

$$s^0(T) \equiv \int_{T_0}^{T} c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} \tag{7.24}$$

La variation d'entropie est alors donnée par

$$s_2 - s_1 = s^0(T_2) - s^0(T_1) - R\ln\frac{p_2}{p_1} \tag{7.25}$$

On peut utiliser ces expressions pour déterminer la variation de pression et de volume massique pour une évolution adiabatique et réversible (et donc isentropique) entre deux températures. Ainsi, l'on aura

$$\ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{R}\int_{T_1}^{T_2} c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{s^0(T_2) - s^0(T_1)}{R} \tag{7.26}$$

Le calcul est simplifié en utilisant la pression relative p_r définie par la relation

$$\ln p_r \equiv \ln\frac{p}{p_0} = \frac{1}{R}\int_{T_0}^{T} c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{s^0(T)}{R} \tag{7.27}$$

que l'on tabule en fonction de la température. On a alors

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_r(T_2)}{p_r(T_1)} \tag{7.28}$$

Semblablement, on peut définir un volume massique relatif, d'où on obtient directement le rapport des volumes massiques

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_r(T_1)}{v_r(T_2)} \tag{7.29}$$

Les valeurs de p_r et de v_r pour l'air sont fournies en annexe du livre de Van Wylen. Pour d'autres gaz, elles ne sont généralement pas données, seule étant donnée la fonction $s^0(T)$. Il suffit alors d'appliquer (7.26).

Les expressions se simplifient si l'on suppose les chaleurs massiques constantes. Introduisant le rapport des chaleurs massiques $k = c_p/c_v$ (γ dans la littérature anglo-saxonne), on a, compte tenu de l'identité $c_p = c_v + R$,

$$k = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} \quad \rightarrow \quad c_v = \frac{R}{k-1} \qquad c_p = \frac{kR}{k-1} \tag{7.30}$$

de sorte qu'on peut réécrire la différentielle de l'entropie comme suit

$$\frac{\mathrm{d}s}{R} = \frac{1}{k-1}\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{k}{k-1}\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{k}{k-1}\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{1}{k-1}\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

expressions valables dans le cas général où k dépend de la température. Lorsque k est constant, ces expressions s'intègrent facilement pour fournir les relations entre rapports de pression, de température et de volume massique pour une transformation isentropique.

$$T_2^{\frac{1}{k-1}} v_2 = T_1^{\frac{1}{k-1}} v_1; \qquad \frac{T_2^{\frac{k}{k-1}}}{p_2} = \frac{T_1^{\frac{k}{k-1}}}{p_1}; \qquad v_2^k p_2 = v_1^k p_1 \tag{7.31}$$

En particulier, on constate que, pour une transformation isentropique $pv^k = \text{cte}$, une expression connue sous le nom de *loi de Laplace*.

7.11 La transformation polytropique réversible d'un gaz parfait

Considérons une transformation réversible d'un gaz parfait telle que $pV^n = \text{cte}$. Une telle transformation est appelée *transformation polytropique*.

Pour une transformation entre deux états 1 et 2, on a donc

$$p_2 V_2^n = p_1 V_1^n \tag{7.32}$$

Mais par ailleurs, le gaz étant parfait

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

de sorte qu'en éliminant les volumes ou les pressions, on obtient

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} \tag{7.33}$$

Pour un système fermé, le travail reçu est donc égal à

$$\begin{aligned} {}_1W_2 &= -\int_1^2 p\mathrm{d}V = -p_1V_1^n\int_1^2 V^{-n}\mathrm{d}V = -p_1V_1^n\frac{V_2^{1-n}-V_1^{1-n}}{1-n} = -\frac{p_2V_2-p_1V_1}{1-n} \\ &= -\frac{mR(T_2-T_1)}{1-n} \end{aligned} \tag{7.34}$$

$(n \neq 1)$.

On peut de même calculer la chaleur échangée au cours de la transformation. Comme, en supposant c_v constant,

$$U_2 - U_1 = mc_v(T_2-T_1) = \frac{mR(T_2-T_1)}{k-1} = \frac{p_2V_2-p_1V_1}{k-1}$$

on a, par application du premier principe,

$${}_1Q_2 = U_2 - U_1 - {}_1W_2 = (p_2V_2-p_1V_1)\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{n-1}\right) = \frac{n-k}{(k-1)(n-1)}(p_2V_2-p_1V_1) \tag{7.35}$$

Comme on le verra ultérieurement, pour les systèmes ouverts, on utilise la transformation polytropique comme point de comparaison avec une transformation adiabatique irréversible entre les mêmes états initial et final afin de définir un rendement.

Lorsque $n = 1$, qui correspond à une transformation isotherme, les expressions précédentes ne sont plus valables. Dans ce cas,

$${}_1W_2 = -p_1V_1\int_1^2 V^{-1}\mathrm{d}V = -p_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1} = -p_1V_1\ln\frac{p_1}{p_2} \tag{7.36}$$

et, comme la variation d'énergie interne est nulle, la chaleur échangée est l'opposée du travail.

7.12 Le second principe de la thermodynamique pour les systèmes ouverts

En suivant le même raisonnement qu'à la section 5.10, le taux de variation de l'entropie d'un système ouvert peut être relié au taux de variation du système fermé constitué de la matière initialement contenue dans le système ouvert par l'expression habituelle

$$\frac{\mathrm{d}S_F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S_O}{\mathrm{d}t} + \oint_S \rho s(\vec{c}-\vec{b}_O)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}S_O}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e \tag{7.37}$$

en supposant comme de coutume les propriétés uniformes sur les sections d'entrée et de sortie.

Par ailleurs, le second principe appliqué aux systèmes fermés s'écrit (7.11)

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} + \mathrm{d}S_i$$

Toutefois, en écrivant cette relation pour les systèmes fermés, on avait considéré les variables thermodynamiques uniformes sur le système, ce qui n'est plus le cas en général pour les systèmes ouverts. En particulier, la température du système n'est en général pas uniforme sur les frontières à travers lesquelles il échange de la chaleur avec le milieu extérieur. Par

conséquent, on doit remplacer $\delta Q/T$ par une somme sur chaque élément de la frontière dont la température est différente

$$\frac{\delta Q}{T} \leftarrow \sum \frac{\delta Q}{T}$$

A la limite, si la température varie continément sur la frontière, en notant $\delta\Phi$ la chaleur échangée par unité de surface, $\delta Q = \delta\Phi \mathrm{d}\mathcal{A}$, de sorte que

$$\frac{\delta Q}{T} \leftarrow \oint_{\mathcal{A}} \frac{\delta\Phi}{T} \mathrm{d}\mathcal{A}$$

En rassemblant les résultats précédents, on obtient donc finalement l'expression suivante pour le taux de variation de l'entropie d'un système ouvert

$$\frac{\mathrm{d}S_O}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i = \oint_{\mathcal{A}} \frac{\dot{\Phi}}{T} \mathrm{d}\mathcal{A} + \dot{S}_i \tag{7.38}$$

7.13 Les systèmes ouverts en régime permanent et les systèmes ouverts avec écoulement uniforme

Pour les systèmes ouverts en régime permanents définis à la section 5.11, l'expression précédente se simplifie en

$$\sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \tag{7.39}$$

et, dans le cas particulier d'une seule entrée et d'une seule sortie

$$\dot{m}(s_s - s_e) = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \tag{7.40}$$

Pour une transformation adiabatique, on aura donc

$$s_s - s_e = \frac{\dot{S}_i}{\dot{m}} \geq 0 \tag{7.41}$$

Pour les systèmes ouverts avec écoulement uniforme définis à la section 5.13, l'expression du second principe devient

$$\frac{\mathrm{d}(ms)_O}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \tag{7.42}$$

Remarquons que l'on a omis le signe $\sum$ qui représente la décomposition entre les diverses parties de la frontière puisque le système est supposé uniforme.

On peut de nouveau intégrer cette expression dans le temps, pour obtenir

$$m_2 s_2 - m_1 s_1 + \sum m_s s_s - \sum m_e s_e = \int_0^t \frac{\dot{Q}}{T} \mathrm{d}t + \int_0^t \dot{S}_i \mathrm{d}t \tag{7.43}$$

Puisque la température du système est uniforme, on peut exprimer le dernier terme en fonction du travail non compensé $\dot{S}_i = \dot{W}_i^*/T$, ce qui fournit l'expression alternative

$$m_2 s_2 - m_1 s_1 + \sum m_s s_s - \sum m_e s_e = \int_0^t \left(\frac{\dot{Q} + \dot{W}_i^*}{T} \right) \mathrm{d}t \tag{7.44}$$

7.14 Les transformations réversibles des systèmes ouverts en régime permanent

On va maintenant établir une expression du travail échangé par un système ouvert permanent dans le cas d'une transformation réversible. Dans le cas d'une seule section d'entrée et de sortie, le premier principe s'écrit (5.33)

$$\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = q + w$$

et le second principe (7.40)

$$\dot{m}(s_s - s_e) = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \geq \sum \frac{\dot{Q}}{T}$$

Considérons à présent deux transformations réversibles :

Transformation adiabatique Dans ce cas, le second principe se réduit à

$$s_s = s_e$$

Par conséquent, vu la relation de Gibbs $\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p$, $h_s - h_e = \int_e^s v\mathrm{d}p$, et dès lors

$$w = \int_e^s v\mathrm{d}p + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \tag{7.45}$$

Transformation isotherme Puisque la transformation est isotherme, il s'ensuit que la température du système est uniforme, et dès lors,

$$\sum \frac{\dot{Q}}{T} = \frac{\dot{Q}}{T} = \dot{m}\frac{q}{T}$$

de sorte que le second principe devient

$$s_s - s_e = \frac{q}{T} \tag{7.46}$$

Par ailleurs, par application de la même relation de Gibbs, $h_s - h_e = T(s_s - s_e) + \int_e^s v\mathrm{d}p$, et par conséquent, l'expression du travail est identique à celle établie pour la transformation adiabatique (7.45).

Enfin, puisqu'un échange de chaleur réversible non isotherme peut se concevoir comme une succession d'échanges de chaleur réversibles isothermes élémentaires, il s'ensuit que l'expression (7.45) est applicable généralement à toutes les transformations réversibles de systèmes ouverts en régime permanent.

Un cas particulier d'une transformation sans échange de travail (comme l'écoulement dans une tuyère), l'expression devient

$$\int_e^s v\mathrm{d}p + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) = 0 \tag{7.47}$$

équation très importante en mécanique des fluides, connue sous le nom d'équation de Bernoulli. Dans le cas particulier des fluides à masse volumique constante, elle se simplifie en

$$v(p_s - p_e) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) = 0 \tag{7.48}$$

L'équation (7.45) est largement employée pour tous les systèmes ouverts avec échange de travail comme les turbomachines. Dans de nombreux cas, les variations d'énergie cinétique et potentielle sont négligeables, de sorte que le travail par unité de masse est simplement

$$w = \int_e^s v\mathrm{d}p \tag{7.49}$$

d'où l'on constate que le travail transmis à l'arbre d'une turbomachine est directement lié au volume massique du fluide la traversant.

Par conséquent, dans le cas d'une centrale thermique à vapeur telle qu'idéalisée ci-après, la pression reste constante dans toutes les composantes où aucun travail n'est échangé et donc l'augmentation de pression dans la pompe est égale à la chute de pression dans la turbine.

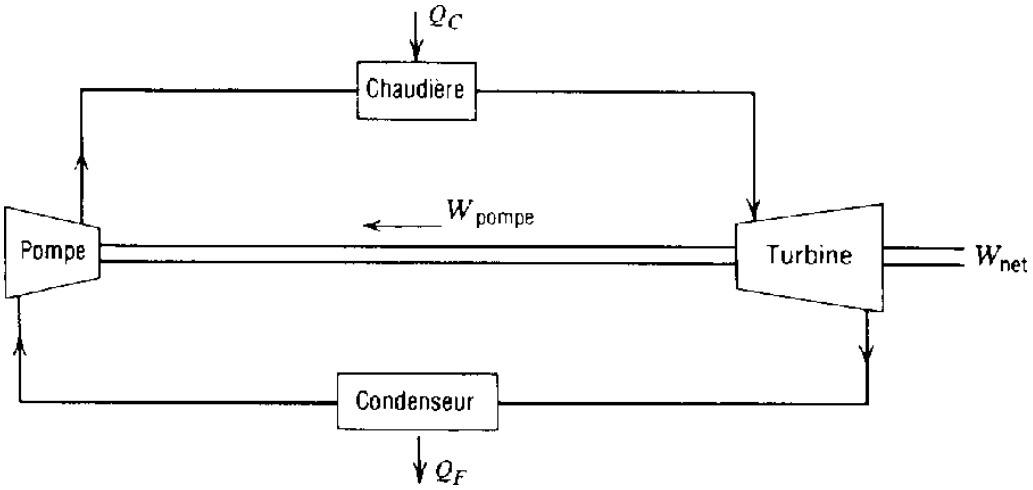


FIG. 7.9 – centrale thermique à vapeur

Par ailleurs, puisque la pompe comprime du liquide dont le volume massique est très petit par rapport à celui de la vapeur détendue dans la turbine, la puissance consommée par la pompe est nettement inférieure à celle fournie par la turbine, la différence étant la puissance nette fournie par la centrale.

7.15 Principe d'accroissement de l'entropie pour un système ouvert

Reprenons la discussion de la section 7.8, mais cette fois pour un système ouvert.

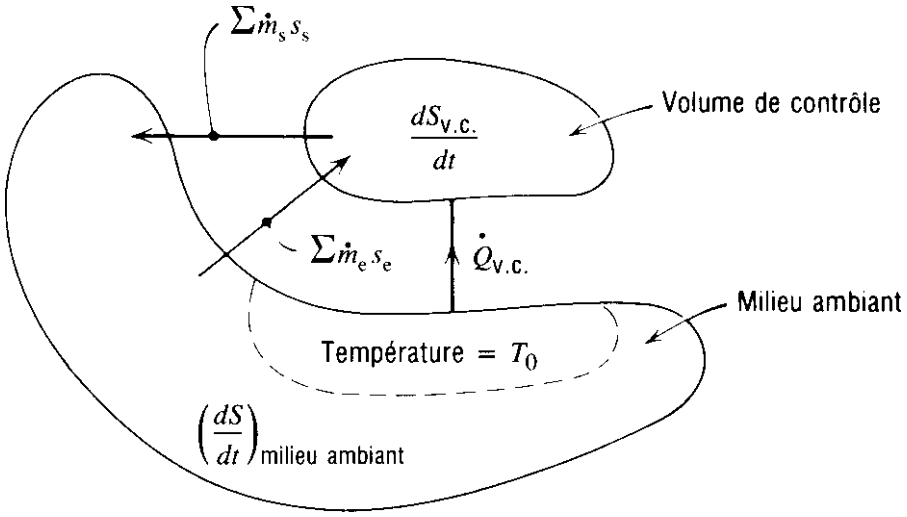


FIG. 7.10 – Principe d'accroissement de l'entropie pour un système ouvert

Le taux de variation de l'entropie du système s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{sys}}}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \sum \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i$$

Par ailleurs, le taux de variation de l'entropie du milieu extérieur, qui est lui aussi un système ouvert, vaut lui

$$\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} - \sum \dot{m}_s s_s + \sum \dot{m}_e s_e = -\frac{\sum \dot{Q}}{T_0} \tag{7.50}$$

puisque les débits sont inversés, de même que l'échange de chaleur, et que, pour le milieu extérieur à température T_0, l'échange de chaleur est réversible.

En sommant ces deux équations, on obtient le taux de variation de l'entropie totale

$$\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{sys}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum \frac{\dot{Q}}{T} - \frac{\sum \dot{Q}}{T_0}}_{\dot{S}_e} + \dot{S}_i = \dot{S}_e + \dot{S}_i > 0 \tag{7.51}$$

Le terme $\dot{S}_e$, toujours positif puisque $\dot{Q} > 0$ lorsque $T < T_0$ et vice-versa, est le taux de production d'entropie externe, due à l'irréversibilité de l'échange de chaleur.

Pour un système ouvert en régime permanent, l'entropie du système est constante, et par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t} = \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e - \frac{\dot{Q}}{T_0}$$

Par contre, pour les systèmes ouverts avec écoulement uniforme, on calcule les variations d'entropie au cours de la transformation en intégrant dans le temps comme on l'a fait à la section 7.13. La variation d'entropie du système vaut

$$\Delta S_{\mathrm{sys}} = m_2 s_2 - m_1 s_1 \tag{7.52}$$

et celle du milieu extérieur

$$\Delta S_{\mathrm{ext}} = \sum m_s s_s - \sum m_e s_e - \frac{Q}{T_0} \tag{7.53}$$

de sorte que l'accroissment total d'entropie vaut

$$\Delta S_{\text{tot}} = m_2 s_2 - m_1 s_1 + \sum m_s s_s - \sum m_e s_e - \frac{Q}{T_0}$$

7.16 Les rendements

On a défini au chapitre précédent la notion d'efficacité d'un cycle. Comme on l'a souligné, cette efficacité est bornée supérieurement par l'efficacité du cycle de Carnot, qui ne dépend que des températures des sources, et donc ne donne en soi aucune information quant au degré de perfection d'un dispositif.

On nomme un indicateur de ce dernier *rendement*. Plusieurs indicateurs de ce type ont été définis, que l'on va maintenant présenter. Un autre sera défini au chapitre suivant. On ne considère ici que des systèmes ouverts en régime permanent.

7.16.1 Rendements des transformations adiabatiques

Systèmes avec échange de travail Pour les systèmes avec échange de travail, le rendement est défini de manière générale par les expressions

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{w_{\text{ideal}}}{w} && \text{machine réceptrice (pompe, ventilateur, compresseur)} \\ \eta &= \frac{w^*}{w^*_{\text{idéal}}} && \text{machine motrice (turbine)} \end{aligned} \tag{7.54}$$

où $w^{(*)}_{\text{idéal}}$ serait le travail reçu (fourni) par une machine idéale. Les diverses définitions du rendement diffèrent quant à la définition de la machine idéale.

On a vu précédemment que le travail échangé lors d'une transformation réversible d'un système ouvert valait (7.45)

$$w = \int_e^s v\mathrm{d}p + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)$$

alors que le travail échangé lors d'une transformation adiabatique réelle (irréversible) vaut lui, par application du premier principe,

$$w = h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)$$

Par conséquent, l'expression générale du rendement est

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\int_e^s v\mathrm{d}p + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)}{h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)} && \text{machine réceptrice} \\ \eta &= \frac{h_e - h_s + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2} + g(z_e - z_s)}{-\int_e^s v\mathrm{d}p + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2} + g(z_e - z_s)} && \text{machine motrice} \end{aligned} \tag{7.55}$$

Pour les machines à fluide (ou plutôt à écoulement) incompressible, le travail massique idéal s'évalue aisément. En effet, comme le volume massique est approximativement constant,

$\int_e^s v\mathrm{d}p \simeq v(p_s - p_e)$. D'autre part, le travail massique réel peut s'évaluer en mesurant la différence d'enthalpie entre sections d'entrée et de sortie (cfr labo du cours MECA 336 Moteurs à pistons en 4e Méca), ou encore en mesurant la puissance à l'arbre de la machine (couple et vitesse de rotation).

Pour les machines à fluide compressible, les choses sont plus complexes. Pour calculer $\int_e^s v\mathrm{d}p$, il faut en effet connaître le chemin thermodynamique parcouru lors de la transformation. Dans le cas des gaz parfaits, une bonne approximation est de supposer que le chemin parcouru coïncide avec celui d'une transformation polytropique réversible (section 7.11), et le rendement ainsi défini est appelé *rendement polytropique*, noté η_p.

Comme pour une polytropique ($pv^n = C$),

$$v\mathrm{d}p = -nCv^{-n}\mathrm{d}v = -\frac{nC}{1-n}\mathrm{d}(v^{1-n}) = \frac{n}{n-1}\mathrm{d}(pv)$$

et

$$\mathrm{d}h = c_p\mathrm{d}T = \frac{kR}{k-1}\mathrm{d}T = \frac{k}{k-1}\mathrm{d}(pv)$$

on obtient, en omettant les termes d'énergie potentielle, toujours négligeables pour les fluides compressibles, les expressions suivantes pour le rendement polytropique

$$\begin{aligned} \eta_p &= \frac{\frac{n}{n-1}(p_s v_s - p_e v_e) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}}{\frac{k}{k-1}(p_s v_s - p_e v_e) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}} && \text{machine réceptrice} \\ \eta_p &= \frac{\frac{k}{k-1}(p_s v_s - p_e v_e) + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}}{\frac{n}{n-1}(p_e v_e - p_s v_s) + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}} && \text{machine motrice} \end{aligned} \tag{7.56}$$

qui deviennent, lorsque les variations d'énergie cinétique sont aussi négligeables,

$$\begin{aligned} \eta_p &= \frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{k}{k-1}} && \text{machine réceptrice} \\ \eta_p &= \frac{\frac{k}{k-1}}{\frac{n}{n-1}} && \text{machine motrice} \end{aligned} \tag{7.57}$$

Lorsque l'on n'a pas affaire à un gaz parfait, comme p. ex. pour les turbines à vapeur, cette définition n'est pas utilisable, ce qui conduit à introduire une autre définition, à savoir celle de *rendement isentropique* noté η_s. Contrairement au cas précédent, où la transformation idéale de référence était la polytropique réversible de même états initial et final que la transformation réelle[2], la transformation idéale de référence est cette fois la transformation adiabatique et réversible, c.-à-d. *isentropique*, de même état initial et de même pression finale (et de même pression totale finale, voir définition de ce terme ci-après) que la transformation réelle.

Il résulte de cette définition que l'état final de la transformation idéale de référence diffère de l'état final réel. En notant s_* l'état final de la transformation isentropique de référence et c_{s_*} la vitesse de sortie correspondante qui, en raison de la définition n'est pas exactement égale à la vitesse de sortie réelle, et compte tenu du fait que $\int_e^{s_*} v\mathrm{d}p = h_{s_*} - h_e$, l'expression du

[2]Remarquez que cette transformation *n'est pas* adiabatique.

rendement isentropique est donc (négligeant toujours les variations d'énergie potentielle)

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{h_{s_*} - h_e + \frac{c_{s_*}^2 - c_e^2}{2}}{h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}} \qquad \text{machine réceptrice} \\ \eta_s &= \frac{h_e - h_s + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}}{h_e - h_{s_*} + \frac{c_e^2 - c_{s_*}^2}{2}} \qquad \text{machine motrice} \end{aligned} \tag{7.58}$$

On peut encore donner une forme alternative de cette expression en introduisant les notions d'enthalpie et de pression totales (ou d'arrêt). On appelle enthalpie et pression totales d'un fluide en un point (h^0, p^0), l'enthalpie et la pression que l'on obtiendrait en amenant le fluide à l'arrêt de manière adiabatique et réversible, c.-à-d. isentropiquement. Il résulte de cette définition que

$$h^0 = h + \frac{c^2}{2} \qquad p^0 = p(h^0, s) \tag{7.59}$$

Pour un gaz parfait avec chaleurs massiques constantes, on a donc

$$p^0 = p \left(\frac{h^0}{h} \right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{7.60}$$

Avec ces définitions des conditions totales, les expressions du rendement isentropique deviennent

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{h_{s_*}^0 - h_e^0}{h_s^0 - h_e^0} \qquad \text{machine réceptrice} \\ \eta_s &= \frac{h_e^0 - h_s^0}{h_e^0 - h_{s_*}^0} \qquad \text{machine motrice} \end{aligned} \tag{7.61}$$

Lorsque les variations d'énergie cinétique sont négligeables, et en faisant l'approximation $c_{s_*} \simeq c_s$,[3] les expressions du rendement isentropique deviennent

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{h_{s_*} - h_e}{h_s - h_e} \qquad \text{machine réceptrice} \\ \eta_s &= \frac{h_e - h_s}{h_e - h_{s_*}} \qquad \text{machine motrice} \end{aligned} \tag{7.62}$$

Explicitons ces dernières expressions dans le cas des gaz parfaits à chaleurs massiques constantes, afin de les comparer avec les expression du rendement polytropique (7.57). En notant Π le rapport entre haute et basse pression, et en rappelant que pour une polytropique,

$$\frac{h_s}{h_e} = \frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

[3]Dans le cas d'un gaz parfait, on peut expliciter l'expression de c_{s_*}. En effet, comme $p_{s_*}^0 = p_s^0$ et $p_{s_*} = p_s$, on en déduit

$$\frac{h_{s_*}^0}{h_{s_*}} = \frac{h_s^0}{h_s} = 1 + \frac{c_s^2}{2h_s}$$

Il en résulte

$$h_{s_*}^0 = h_{s_*} + \frac{h_{s_*}}{h_s} \frac{c_s^2}{2} \qquad \rightarrow \qquad c_{s_*}^2 = \frac{h_{s_*}}{h_s} c_s^2$$

on obtient

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{\Pi^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\Pi^{\frac{n-1}{n}} - 1} = \frac{\Pi^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\Pi^{\frac{1}{\eta_p}\frac{k-1}{k}} - 1} && \text{machine réceptrice} \\ \eta_s &= \frac{1 - \Pi^{-\frac{n-1}{n}}}{1 - \Pi^{-\frac{k-1}{k}}} = \frac{1 - \Pi^{-\eta_p\frac{k-1}{k}}}{1 - \Pi^{-\frac{k-1}{k}}} && \text{machine motrice} \end{aligned} \tag{7.63}$$

et l'on remarque que le rendement isentropique dépend non seulement du rendement polytropique (ou, ce qui est équivalent, de l'exposant n) mais aussi du rapport de pression. Pour les faibles rapports de pression $\Pi = 1 + \epsilon$, $\eta_s \approx \eta_p$, ce qui explique le nom « small stage efficiency »employé parfois comme synonyme de rendement polytropique dans la littérature anglophone.

Pour finir, donnons une interprétation graphique à ces définitions, pour le cas où les variations d'énergie cinétique sont négligeables. Considérons tout d'abord le cas d'une compression. La polytropique joignant les états initial et final, de même que l'état final de la transformation isentropique de référence sont représentés dans le diagramme entropique ci-dessous.

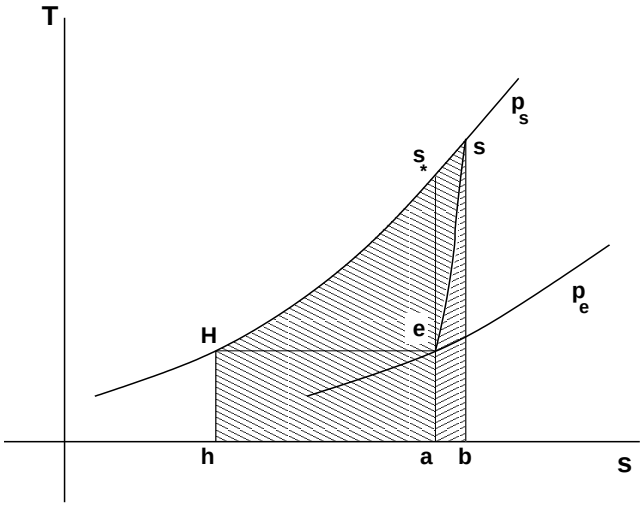


FIG. 7.11 – rendement dans le cas d'une compression

Le travail reçu lors de la transformation réelle $w = h_s - h_e$ se représente comme suit. Soit le point H situé à l'intersection de l'isenthalpique passant par e[4] et l'isobare p_s. Alors, par construction, $h_s - h_e = h_s - h_H = \int_H^s T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p = \int_H^s T\mathrm{d}s$, qui est représentée sur le graphique par l'aire $H - s - b - h - H$.

Le travail reçu lors de la transformation polytropique de référence vaut, lui, $w_p = \int_e^s v\mathrm{d}p = \int_e^s \mathrm{d}h - T\mathrm{d}s$, soit la différence entre la variation d'enthalpie $h_s - h_e$ représentée par l'aire $H - s - b - h - H$ et $\int_e^s T\mathrm{d}s$ représentée par l'aire $e - s - b - a - e$. Il est donc représenté par l'aire $H - s - e - a - h - H$, et le rendement polytropique vaut donc

$$\eta_p = \frac{\text{aire } H - s - e - a - h - H}{\text{aire } H - s - b - h - H}$$

Le travail reçu lors de la transformation isentropique de référence vaut $w_s = h_{s_*} - h_e = h_{s_*} - h_H = \int_H^{s_*} T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p = \int_H^{s_*} T\mathrm{d}s$, soit l'aire $H - s_* - a - h - H$, de sorte que le rendement

[4]Sur le graphique, on a considéré le cas d'un gaz parfait, de sorte que l'isenthalpique est confondue avec l'isotherme, c.-à-d. horizontale.

isentropique vaut

$$\eta_s = \frac{\text{aire } H - s_* - a - h - H}{\text{aire } H - s - b - h - H}$$

d'où il apparaît que $\eta_s < \eta_p$.

Ce résultat se confirme analytiquement pour les gaz parfaits en développant l'expression du rendement isentropique pour les rapports de pression proches de l'unité. Avec $\Pi = 1 + \epsilon$ et la formule binomiale

$$(1+\epsilon)^m = 1 + m\epsilon + \frac{m(m-1)}{2}\epsilon^2 + \ldots = 1 + m\epsilon(1 + (m-1)\frac{\epsilon}{2} + \ldots)$$

$$\eta_s = \frac{\frac{k-1}{k}\epsilon\left[1 + \left(\frac{k-1}{k} - 1\right)\frac{\epsilon}{2} + \ldots\right]}{\frac{k-1}{\eta_p k}\epsilon\left[1 + \left(\frac{k-1}{\eta_p k} - 1\right)\frac{\epsilon}{2} + \ldots\right]} \simeq \eta_p\left[1 - \frac{k-1}{k}\left(\frac{1}{\eta_p} - 1\right)\frac{\epsilon}{2}\right] < \eta_p$$

Répétons l'analyse pour le cas d'une détente, représentée ci-dessous dans un diagramme entropique

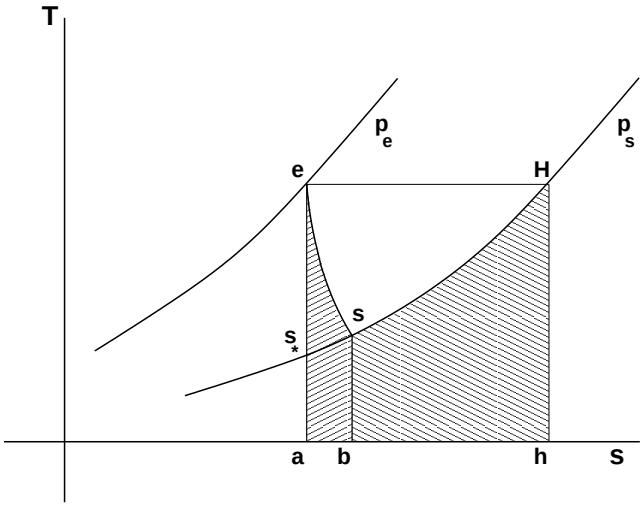


FIG. 7.12 – analyse pour le cas d'une détente dans un diagramme entropique

Le travail réel fourni vaut $h_e - h_s$, qui est représenté par l'aire $s - H - h - b - s$ alors que le travail fourni lors de la transformation polytropique de référence vaut $w_p^* = \int_s^e v\mathrm{d}p = \int_s^e \mathrm{d}h - T\mathrm{d}s = h_e - h_s + \int_e^s T\mathrm{d}s$, soit la somme du travail réel représenté par l'aire $s - H - h - b - s$ et de $\int_e^s T\mathrm{d}s$ représentée par l'aire $e - s - b - a - e$, et est donc représenté par l'aire $e - s - H - h - a - e$. Par conséquent, le rendement polytropique de détente vaut

$$\eta_p = \frac{\text{aire } s - H - h - b - s}{\text{aire } e - s - H - h - a - e}$$

De son côté, le travail fourni lors de la transformation isentropique de référence vaut $w_s^* = h_e - h_{s_*} = h_H - _{s_*}$ représenté par l'aire $s_* - H - h - a - s_*$, de sorte que le rendement isentropique vaut

$$\eta_s = \frac{\text{aire } s - H - h - b - s}{\text{aire } s_* - H - h - a - s_*}$$

d'où il apparaît que $\eta_s > \eta_p$.

Rien d'étonnant dès lors à ce que les fabricants de compresseurs préfèrent donner le rendement polytropique de leurs machines, alors que les fabricants de turbines préfèrent donner le rendement isentropique !

Systèmes sans échange de travail (diffuseurs et tuyères) Pour les systèmes sans échange de travail, les définitions précédentes n'ont pas de sens. La fonction de ces dispositifs est de transformer l'énergie cinétique en énergie interne ou vice-versa. Par conséquent, la définition générale du rendement de ces dispositifs est donc (en supposant à nouveau les variations d'énergie potentielle négligeables)

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\left(\frac{c_e^2-c_s^2}{2}\right)_{\text{idéal}}}{\frac{c_e^2-c_s^2}{2}} = \frac{\int_e^s v\mathrm{d}p}{h_s-h_e} \qquad \text{diffuseur} \\ \eta &= \frac{\frac{c_s^2-c_e^2}{2}}{\left(\frac{c_s^2-c_e^2}{2}\right)_{\text{idéal}}} = \frac{h_e-h_s}{\int_s^e v\mathrm{d}p} \qquad \text{tuyère} \end{aligned} \tag{7.64}$$

En écoulement incompressible, ces expressions s'évaluent aisément. En écoulement compressible, il faut à nouveau distinguer selon le choix de la transformation idéale de référence, et l'on définit ainsi rendements polytropique et isentropique de compression et de détente, dont les expressions sont identiques à celles obtenues à la section précédente lorsque les variations d'énergie cinétique étaient négligeables.

7.16.2 Rendements des transformations avec échange de chaleur

On peut montrer que le travail nécessaire pour comprimer un gaz à une pression donnée est réduit si le gaz est refroidi au cours de la compression — c'est d'ailleurs la raison d'être des « intercoolers »qui équipent de nombreux groupes de suralimentation de moteurs volumétriques. Pour ces compressions réfrigérées, il y a lieu de définir un autre rendement. Si l'échange de chaleur s'effectue avec une source de température T_0, supposée égale à la température d'entrée du fluide, la transformation réversible de référence est la compression isotherme. On définit donc le *rendement isotherme*, η_T, comme

$$\eta_T = \frac{w_T}{w} = \frac{h_{s_T} - h_e - T_0(s_{s_T} - s_e)}{h_s - h_e - q} \tag{7.65}$$

où s_T est l'état à pression p_s et à température T_0. Pour un gaz parfait, $h_{s_T} - h_e = 0$.

On définit de même un rendement isotherme de détente (beaucoup moins utilisé cependant)

$$\eta_T = \frac{w^*}{w_T^*} = \frac{h_e - h_s + q}{h_e - h_{s_T} + T_0(s_{s_T} - s_e)} \tag{7.66}$$

Chapitre 8

Irréversibilité et exergie

Comme on l'a vu au chapitre précédent, les irréversibilités sont responsables des imperfections des transformations réelles. Ceci nous a conduit à définir toute une série de rendements afin de caractériser le degré de perfection des transformations réelles, en les comparant avec des transformations idéales (réversibles) de référence. Mais l'inconvénient de ces multiples définitions est précisément la multiplicité des transformations idéales de référence, selon le type d'application envisagé.

Au contraire, nous allons à présent définir une transformation réversible de référence indépendante du type de dispositif considéré (échangeur de chaleur, compresseur, turbine), qui nous conduira à définir les notions d'*irréversibilité* (ou encore travail non compensé ou chaleur non compensée) et d'*énergie disponible* (ou utilisable) ou encore *exergie*.

Ces notions se sont avérées des outils très puissants d'analyse et d'optimisation de systèmes thermodynamiques complexes, de sorte que leur usage est maintenant largement répandu.

8.1 Travail réversible et irréversibilité

Les notions de travail réversible et d'irréversibilité reposent sur l'existence d'une source de chaleur gratuite à température T_0.

8.1.1 Systèmes fermés

Considérons un système fermé recevant une quantité de chaleur ${}_1Q_2$ d'une source de chaleur à température T_C et fournissant un certain travail ${}_1W_2^*$. De par le premier principe

$$ {}_1Q_2 = U_2 - U_1 + {}_1W_2^* \tag{8.1} $$

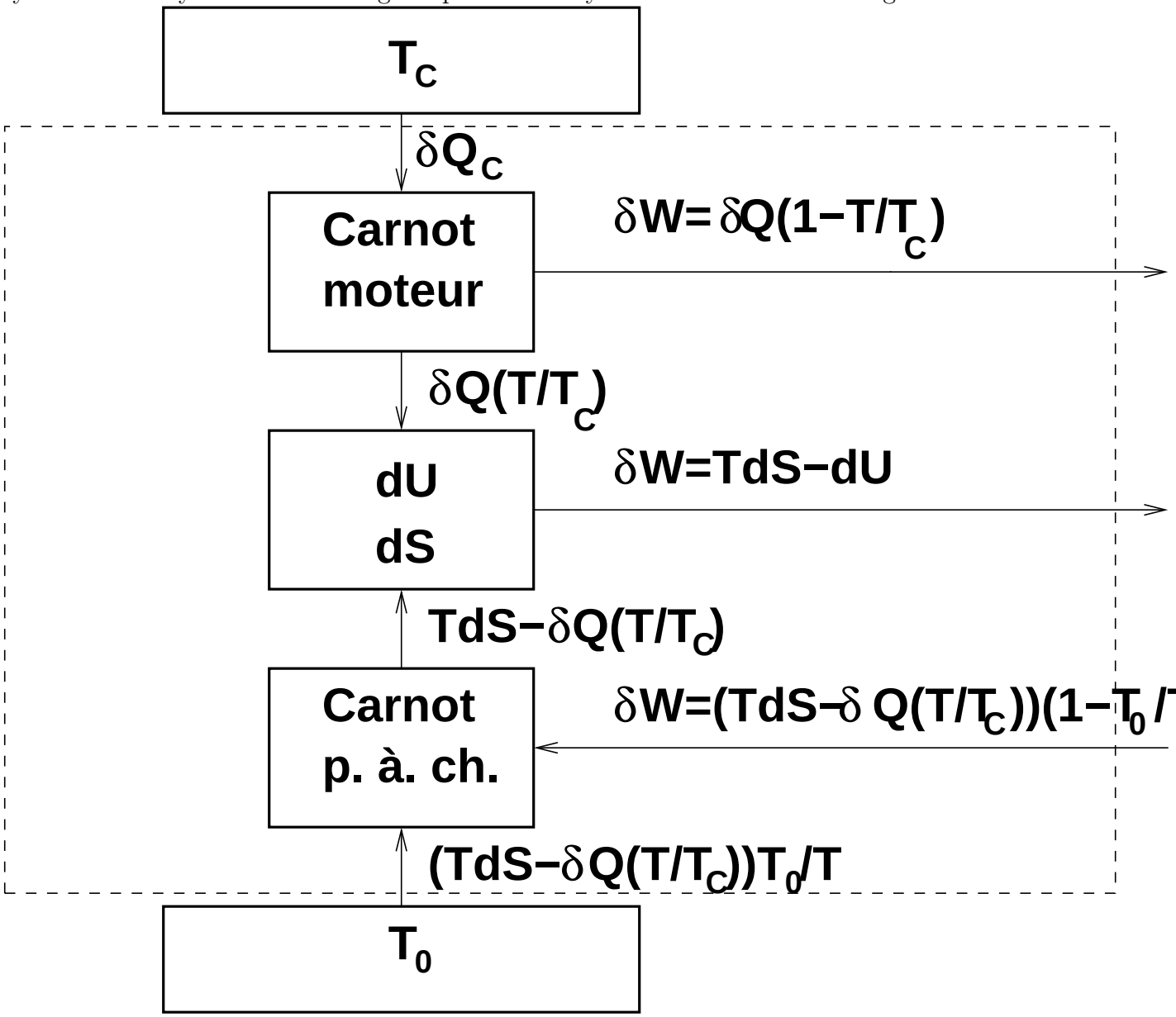
et d'autre part, par le second principe, l'accroissement total d'entropie (système + source)

$$ \Delta S_{\text{tot}} = S_2 - S_1 - \frac{{}_1Q_2}{T_C} > 0 \tag{8.2} $$

Construisons à présent un dispositif réversible tel que

1. le système subisse *la même transformation*, en
2. prélevant *la même quantité de chaleur* à la source chaude.

Pour ce faire, ajoutons au système un cycle de Carnot moteur entre la source chaude et le système et un cycle de Carnot frigorifique entre le système et la source froide gratuite.



Sommant les quantités de travail échangées par les 3 systèmes, le travail fourni par le dispositif réversible, appelé travail réversible, vaut

$$\begin{aligned} \delta W^*_{\text{rev}} &= T\mathrm{d}S - \mathrm{d}U + \delta Q\left(1-\frac{T}{T_C}\right) - (T\mathrm{d}S - \delta Q\frac{T}{T_C})\left(1-\frac{T_0}{T}\right) \\ &= T_0\mathrm{d}S - \mathrm{d}U + \delta Q\left(1-\frac{T_0}{T_C}\right) \end{aligned} \tag{8.3}$$

et, en intégrant, pour une transformation finie,

$$W^*_{\text{rev}} = T_0(S_2 - S_1) - (U_2 - U_1) + {}_1Q_2\left(1-\frac{T_0}{T_C}\right) \tag{8.4}$$

La différence entre le travail effectivement réalisé et le travail réversible est l'irréversibilité ou travail (ou chaleur) non compensé(e).

$${}_1I_2 = W^*_{\text{rev}} - {}_1W^*_2 \tag{8.5}$$

En substituant dans cette équation les expressions du travail réversible et du travail réel, on obtient la forme alternative

$$ {}_1I_2 = T_0(S_2 - S_1) - {}_1Q_2\frac{T_0}{T_C} = T_0\Delta S_{\text{tot}} \tag{8.6} $$

On peut encore réécrire le résultat comme suit :

$$ (U_2 - U_1) - T_0(S_2 - S_1) = {}_1W_2 + {}_1Q_2\left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) - {}_1I_2 \tag{8.7} $$

expression qui ressemble au premier principe, mais en faisant apparaître les irréversibilités. Le membre de gauche est la variation d'*énergie utilisable* $U - T_0S$, qui est donc égale à la somme du travail reçu et de la fraction utilisable (convertible en travail) de la quantité de chaleur reçue, diminuée des pertes par irréversibilités.

8.1.2 Systèmes ouverts en régime permanent

On effectue l'analyse pour les systèmes ouverts en procédant de manière analogue, et, dans le cas d'une seule section d'entrée et de sortie, on trouve, en tenant compte des variations d'énergie cinétique et potentielle,

$$ w^*_{\text{rev}} = T_0(s_s - s_e) - [(h_s + \frac{c_s^2}{2} + gz_s) - (h_e + \frac{c_e^2}{2} + gz_e)] + q\left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) \tag{8.8} $$

et l'irréversibilité massique vaut

$$ i = w^*_{\text{rev}} - w^* = T_0(s_s - s_e) - \frac{T_0}{T_C}q = T_0\left[\frac{1}{\dot{m}}\frac{\mathrm{d}S_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}\right] \tag{8.9} $$

On peut encore réécrire le résultat de la manière suivante :

$$ h_s - h_e - T_0(s_s - s_e) + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) = w + q\left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right) - i \tag{8.10} $$

expression connue sous le nom de *bilan exergétique*, la grandeur $h - T_0s$ étant nommée *exergie* ou *enthalpie utilisable*, que l'on désigne par le symbole j. Elle exprime la conservation de l'exergie, aux pertes par irréversibilité près.

On la généralise sans difficultés au cas où le système comporte plusieurs sections d'entrée et/ou de sortie, et échange de la chaleur avec plusieurs sources chaudes. L'expression générale est

$$ \sum \dot{m}_s\left(h - T_0s + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \sum \dot{m}_e\left(h - T_0s + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = \sum_{k=1}^{n}\dot{Q}_k\left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) + \dot{W} - \dot{I} \tag{8.11} $$

où $\dot{I}$ est le taux de perte d'exergie par irréversibilité

$$ \dot{I} = T_0\frac{\mathrm{d}S_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} $$

On en tire les conclusions suivantes :

1. une puissance mécanique est un flux d'exergie pure ;

2. l'apport exergétique d'un transfert de chaleur est toujours inférieur à la quantité de chaleur reçue. L'apport est d'autant plus grand que la température de la source est élevée. Un apport de chaleur d'une source à température plus faible que l'ambiance représente une consommation d'exergie, d'autant plus grande que la température de la source est faible ;
3. un apport de matière correspond à un apport d'exergie égale à $j = h - T_0 s$;
4. les énergies cinétique et potentielle sont de l'exergie pure ;
5. l'irréversibilité se traduit par une perte d'exergie, égale au produit de la production d'entropie totale par la température de la source gratuite.

8.1.3 Cas général : transformations instationnaires des systèmes ouverts

Le résultat général pour les transformations instationnaires des systèmes ouverts peut être obtenu formellement en combinant les expressions des premier et second principe. En généralisant pour un nombre arbitraire de sources, l'accroissement de l'entropie du milieu extérieur vaut (7.50)

$$\frac{\mathrm{d}S_{\text{ext}}}{\mathrm{d}t} - \sum \dot{m}_s s_s + \sum \dot{m}_e s_e = -\sum \frac{\dot{Q}_k}{T_k}$$

de sorte que l'accroissement total d'entropie vaut

$$\frac{\mathrm{d}S_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S_{\text{sys}}}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e - \sum \frac{\dot{Q}_k}{T_k}$$

relation que l'on réécrit de la manière suivante

$$\frac{\mathrm{d}S_{\text{sys}}}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s s_s - \sum \dot{m}_e s_e = \frac{\mathrm{d}S_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} + \sum \frac{\dot{Q}_k}{T_k} \tag{8.12}$$

Par ailleurs, le premier principe s'écrit (5.26)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}\right)_{\text{sys}} + \sum \dot{m}_s \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \sum \dot{m}_e \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = \sum \dot{Q}_k + \dot{W}$$

Soustrayant de cette dernière le produit de la précédente par T_0, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U - T_0 S + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}\right)_{\text{sys}} + \sum \dot{m}_s \left(h - T_0 s + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s \\ - \sum \dot{m}_e \left(h - T_0 s + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = \sum \dot{Q}_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) + \dot{W} - \dot{I}\end{aligned} \tag{8.13}$$

de laquelle on peut retrouver les deux cas précédents

Systèmes fermés $\dot{m}_s = \dot{m}_e = 0$, et l'on obtient (8.7) en intégrant dans le temps

Systèmes ouverts en régime permanent La dérivée temporelle s'annule et l'on retrouve (8.11)

Un troisième cas particulier est celui des systèmes ouverts uniformes non permanents. En intégrant l'équation générale dans le temps, on obtient

$$\begin{aligned} m_2\left(u_2 - T_0 s_2 + \frac{c_2^2}{2} + g z_2\right) - m_1\left(u_1 - T_0 s_1 + \frac{c_1^2}{2} + g z_1\right) \\ + \sum m_s \left(h - T_0 s + \frac{c^2}{2} + g z\right)_s - \sum m_e \left(h - T_0 s + \frac{c^2}{2} + g z\right)_e \\ = \sum Q_k \left(1 - \frac{T_0}{T_k}\right) + W - I \end{aligned} \tag{8.14}$$

expression dont on tire également le travail réversible

$$W^*_{\text{rev}} = W^* + I = -(W - I) \tag{8.15}$$

et l'irréversibilité. Pour cette dernière, on obtient également l'expression alternative

$$I = T_0 \left[(m_2 s_2 - m_1 s_1) + \sum m_s s_s - \sum m_e s_e - \sum \frac{Q_k}{T_k}\right] \tag{8.16}$$

8.2 Exergie et rendement exergétique des systèmes ouverts stationnaires

On a établi à la section précédente les bilans exergétiques pour les systèmes fermés et ouverts. On va tenter à présent de donner une interprétation physique à la notion d'exergie qui a été définie à cette occasion.

Soit une quantité de matière dans un état donné. Posons-nous la question de savoir quel serait le travail réversible maximum que cette matière peut fournir au moyen d'un système ouvert stationnaire, le milieu extérieur étant au repos à une température T_0 et une pression p_0. Clairement, le travail maximum sera obtenu en amenant cette quantité de matière en équilibre avec le milieu extérieur. Dans ce cas, le travail réversible vaut (8.8)

$$w^*_{\text{rev}} = [(h_e - T_0 s_e + \frac{c_e^2}{2} + g z_e) - (h_0 - T_0 s_0 + g z_0)] + q\left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right)$$

et le dernier terme est nul puisque les seuls échanges de chaleur possibles sont avec le milieu extérieur à température T_0, de sorte que le travail maximum réalisable n'est rien d'autre que la différence d'exergie totale (y compris les termes d'énergie cinétique et potentielle) entre l'état considéré et l'état du milieu extérieur.

Si, comme on le fait parfois, on définit l'exergie par l'expression

$$j = (h - h_0) - T_0(s - s_0)$$

alors l'exergie du milieu extérieur est nulle, et l'exergie totale dans un état donné est égale au travail maximum réalisable par une quantité de matière dans cet état au moyen d'un système ouvert stationnaire.

On peut vérifier qu'il en est bien ainsi en calculant le travail réalisé lors d'une transformation composée d'une détente adiabatique et réversible (isentropique) jusqu'à la température du milieu extérieur, suivie d'une détente/compression isotherme réversible. En supposant les variations d'énergie cinétique et potentielle négligeables, et en notant m le point intermédiaire tel que $s_m = s_e, T_m = T_0$, on a

isentropique $w^*_{\text{rev}} = h_e - h_m$

isotherme $w^*_{\text{rev}} = h_m - h_0 + T_0(s_0 - s_m)$

de sorte que

$$w^*_{\text{rev}} = h_e - h_0 - T_0(s_e - s_0) = j_e$$

L'application du concept d'exergie est illustrée ci-dessous dans le cas de l'évolution dans un moteur à combustion interne

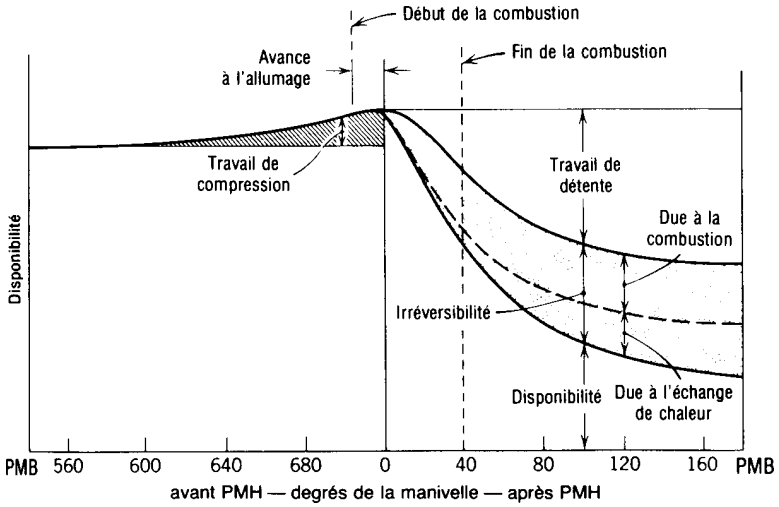


FIG. 8.1 – L'application du concept d'exergie dans le cas de l'évolution dans un moteur à combustion interne

Le graphique indique l'évolution de l'exergie avec l'angle de manivelle. Dans la première partie de la transformation, l'exergie augmente par suite du travail de compression du mélange. Un peu avant le point mort haut, la combustion commence, et la détente débute au point mort haut. On constate la diminution de l'exergie dans la phase de détente en raison du travail de détente effectué par le mélange, et des pertes par irréversibilité correspondant au processus de combustion lui-même d'une part, et au transfert de chaleur vers l'eau de refroidissement d'autre part[1].

Moins il y a d'irréversibilités dans un processus, plus grand est le travail effectué (ou plus faible est le travail reçu). Cette observation revêt une grande importance, car l'exergie est une de nos ressources naturelles. Plus grandes sont les pertes par irréversibilité, plus nos réserves d'exergie diminuent. Il importe dès lors de les utiliser le plus efficacement possible.

Enfin, la notion d'exergie conduit naturellement à définir un rendement exergétique. D'une manière générale, il s'exprime comme suit

$$\eta_{ex} = \frac{\text{variation d'exergie utile réelle}}{\text{variation d'exergie utile réversible}} \tag{8.17}$$

Ainsi, pour une turbine à vapeur, et plus généralement pour une machine motrice, l'effet utile est le travail effectué. On a dès lors

$$\eta_{ex} = \frac{w^*}{w^*_{\text{rev}}} = \frac{h_e - h_s + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2} + g(z_e - z_s) + q}{j_e - j_s + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2} + g(z_e - z_s)} \tag{8.18}$$

[1]Le code de ce syllabus étant en partie fournit par Degrez, je rajoute le texte qu'il avait décidé de ne pas mettre. Je le signalerai chaque fois

Par contre, pour une machine réceptrice, l'effet utile est la variation d'exergie du fluide

$$\eta_{ex} = \frac{j_s - j_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)}{w} = \frac{j_s - j_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)}{h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) - q} = \frac{w_{\text{rev}}}{w} \tag{8.19}$$

de sorte qu'on peut donner encore une autre interprétation du rendement exergétique, à savoir

$$\eta_{ex} = \frac{\text{variation d'exergie onéreuse réversible}}{\text{variation d'exergie onéreuse réelle}}$$

De même, pour une chaudière, on aura

$$\eta_{ex} = \frac{j_s - j_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)}{q\left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right)} \tag{8.20}$$

Enfin, pour une machine thermique (cyle moteur)

$$\eta_{ex} = \frac{w^*}{q_C\left(1 - \frac{T_0}{T_C}\right)} = \frac{w^*}{q_C}\frac{q_C}{w^*_{\text{rev}}} = \frac{\varepsilon_{\text{th}}}{\varepsilon_{\text{th,Carnot}}} \tag{8.21}$$

et semblablement pour une machine frigorifique (cycle frigorifique)

$$\eta_{ex} = \frac{-q_F\left(1 - \frac{T_0}{T_F}\right)}{w} = \frac{w_{\text{rev}}}{q_F}\frac{q_F}{w} = \frac{\varepsilon_{\text{fr}}}{\varepsilon_{\text{fr,Carnot}}} \tag{8.22}$$

Chapitre 9

Cycles moteurs

Certains générateurs de puissance comme la centrale thermique à vapeur opèrent effectivement selon un cycle, c.-à-d. que le fluide actif retourne à son état initial après avoir subi un ensemble de transformations. Par contre, les moteurs à combustion interne (moteurs volumétriques et turbines à gaz) n'opèrent pas à proprement parler selon un cycle, puisque le fluide actif quitte le dispositif dans un état différent (composition et/ou conditions de pression/température) de celui dans lequel il est entré.

Dans ces derniers cas, il s'avère néanmoins intéressant d'analyser les performances de cycles idéalisés qui approximent le processus réel. C'est l'approche qui sera suivie dans ce chapitre et le suivant. Le fluide actif sera soit une substance à changement de phase, soit un gaz, que l'on considérera comme parfait.

9.1 Introduction

Comme on l'a fait remarquer à la section 6,1, on peut distinguer parmi les cycles moteurs, entre ceux qui opèrent à l'aide de systèmes fermés subissant une évolution temporelle, qui font intervenir du travail de déplacement de frontière, et ceux qui opèrent à l'aide de systèmes ouverts en régime, qui font intervenir du travail à l'arbre d'une machine tournante.

Pour une transformation d'un système ouvert en régime avec variations négligeables d'énergie cinétique et potentielle, le travail massique réversible vaut

$$w = \int v \mathrm{d}p$$

alors que pour un système fermé, il vaut

$$w = -\int p \mathrm{d}v$$

Ces deux grandeurs sont représentées dans le diagramme ci-dessous.

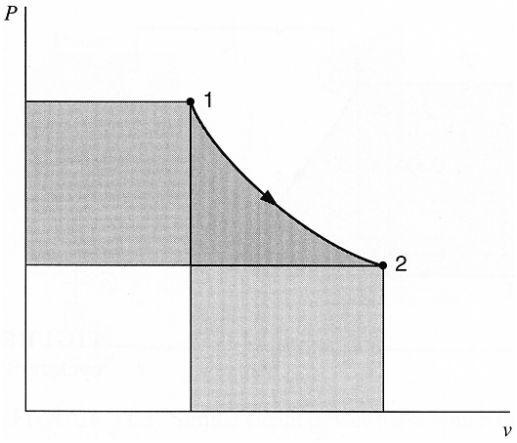


FIG. 9.1 – travail massique réversible d'un système ouvert en régime

Considérons un cyle moteur composé de 4 transformations de systèmes ouverts en régime tel que la centrale thermique schématisée à la section 6.5. On suppose que les transformations sont internement réversibles et que les variations d'énergie cinétique et potentielle sont négligeables. En outre, on suppose que les échanges de chaleur dans chaudière et condenseur sont isobares (et donc sans échange de travail) et que les processus de compression et détente dans la pompe et la turbine sont adiabatiques, de sorte que les 4 transformations apparaissent comme suit dans un diagramme $p - v$.

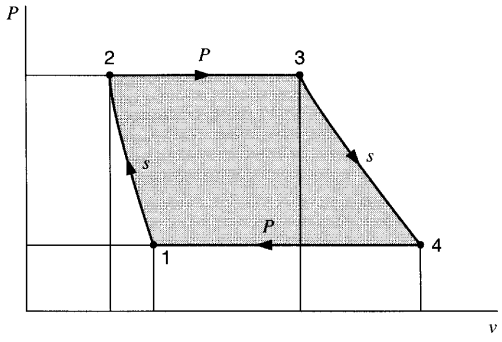


FIG. 9.2 – Cyle moteur composé de 4 transformations de systèmes ouverts en régime

Le travail net effectué par ce cycle vaut donc

$$w^*_{\text{net}} = -\int_1^2 v\mathrm{d}p + 0 - \int_3^4 v\mathrm{d}p + 0 = -\int_1^2 v\mathrm{d}p + \int_4^3 v\mathrm{d}p$$

soit l'aire à l'intérieur de la courbe décrite par le cycle. Le travail effectué lors de la détente est supérieur à celui reçu lors de la compression parce que le volume massique est plus élevé lors de la détente.

Si le même cycle était effectué par un système fermé à frontière mobile de type cylindre/piston, le travail massique net serait

$$w^*_{\text{net}} = \int_1^2 p\mathrm{d}v + \int_2^3 p\mathrm{d}v + \int_3^4 p\mathrm{d}v + \int_4^1 p\mathrm{d}v$$

qui est aussi l'aire à l'intérieur de la courbe. Le travail net est positif parce que pour chaque changement de volume massique, la pression est plus grande lors des détentes que lors des compressions.

Le travail massique net est le même pour les deux systèmes, bien que le travail lors de chacune des 4 transformations soit différent dans les 2 cas. Ceci est une conséquence du fait que

$$\underbrace{\oint p\mathrm{d}v}_{w^*_{\mathrm{net,SF}}} + \underbrace{\oint v\mathrm{d}p}_{-w^*_{\mathrm{net,SO}}} = \oint \mathrm{d}(pv) = 0$$

9.2 Le cycle de Rankine

Le travail effectué par un cycle moteur composé des 4 transformations de systèmes ouverts en régime considéré précédemment est d'autant plus grand que la différence de volume massique entre les phases de détente et de compression est grande. Le cycle de Rankine utilise un changement de phase afin de maximiser cette différence. C'est le cycle idéal des centrales thermiques à vapeur d'eau représenté schématiquement dans un diagramme entropique ci-dessous.

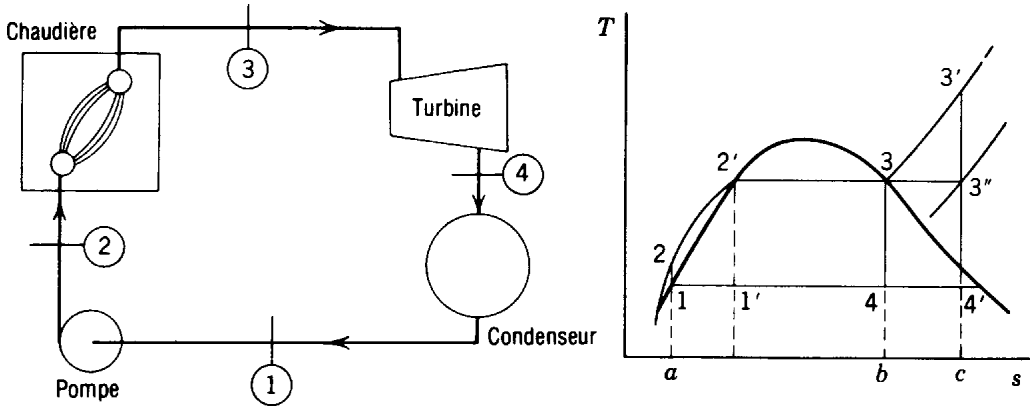


FIG. 9.3 – Cycle idéal des centrales thermiques à vapeur d'eau représenté schématiquement dans un diagramme entropique

Il se compose de

1–2 : pompage adiabatique et réversible dans la pompe, à partir d'un état de liquide saturé 1 ;

2–3 : échange de chaleur isobare dans la chaudière jusqu'à l'état de vapeur saturée 3 ;

3–4 : détente adiabatique et réversible dans la turbine (ou dans une machine volumétrique à vapeur) ;

4–1 : échange de chaleur isobare dans le condenseur.

Une variante est le cycle de Hirn dans lequel la vapeur est surchauffée avant d'être détendue. C'est cette variante qui est employée dans les centrales électriques. On en expliquera les raisons ultérieurement.

En négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle, la chaleur reçue par le fluide est représentée par l'aire $a-2-2'-3-b-a$ et la chaleur cédée au condenseur est représentée

par l'aire $a-1-4-b-a$. L'efficacité thermique du cycle est donc donnée par la relation

$$\varepsilon_{\text{th}} = \frac{\text{aire } 1-2-2'-3-4-1}{\text{aire } a-2-2'-3-b-a} \tag{9.1}$$

Bien que le cycle de Rankine ait une efficacité inférieure à l'efficacité de Carnot en raison de la production d'entropie lors du chauffage en phase liquide $2-2'$, le rendement exergétique du cycle de Rankine est en général très bon (supérieur à 80 %).

On peut se demander pourquoi on n'utilise pas plutôt le cyle de Carnot $1'-2'-3-4$. La raison en est que la compression d'un mélange liquide/vapeur présente de grands dangers (coup de liquide). Par contre, la compression en phase liquide se réalise très facilement et avec une énergie beaucoup plus faible.

Inconvénients du cycle de Rankine

- Puisqu'il exige deux changements de phase, les températures des sources doivent être comprises entre le point triple et le point critique. $T_C - T_F$ peut donc difficilement dépasser 150 °C, et donc une efficacité de Carnot de 30 à 40%.
- Pour l'eau, avec l'ambiance comme source froide, le condenseur doit être sous vide, ce qui complique la construction de la machine et aussi celui de la machine motrice car le rapport de détente est très élevé.
- La condensation partielle (brouillard) lors de la détente exclut l'emploi de turbines. On ne peut donc le réaliser qu'avec une machine volumétrique, ce qui limite les puissances. Cet inconvénient peut être évité par l'emploi de fluides organiques dont la cloche de saturation est penchée vers la droite dans le diagramme entropique. De plus, pour ces fluides, la pression de saturation augmente moins vite avec la température, et donc le rapport de détente est moins élevé. L'emploi de ces fluides pose cependant des problèmes technologiques, chimiques et thermodynamiques.

9.3 Effet de la pression et de la température sur le cycle de Rankine

9.3.1 Effet de la pression de condenseur

Examinons l'influence d'une baisse de la pression de condenseur.

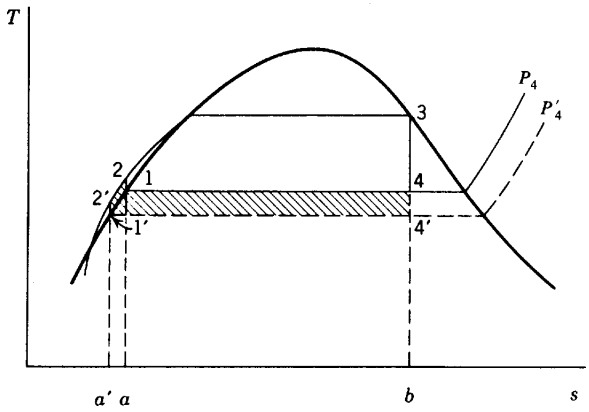


FIG. 9.4 – Effet de la pression de condenseur

On observe que le travail net augmente de la surface hachurée, alors que la chaleur fournie à la vapeur augmente de l'aire $a' - 2' - 2 - a - a'$. Ces deux aires étant approximativement égales, l'efficacité thermique augmente.

Mais le titre en vapeur à l'échappement $4'$ diminue. En pratique, pour les turbines à vapeur, on ne doit pas dépasser une teneur en eau de 10% (diminution de rendement, érosion).

9.3.2 Effet de la surchauffe

Considérons à présent l'effet de la surchauffe

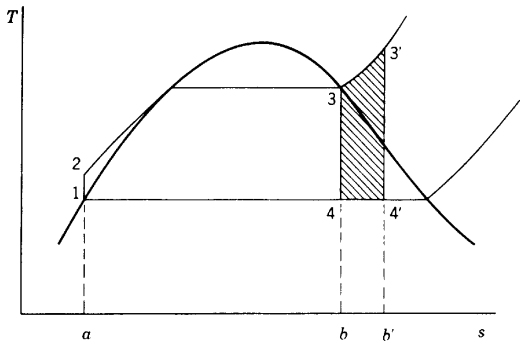


FIG. 9.5 – Effet de la surchauffe

Le travail augmente de l'aire hachurée, et la chaleur de l'aire $3 - 3' - b' - b - 3$. L'effet net est une augmentation de l'efficacité, correspondant au fait que la température moyenne lors du chauffage augmente. De plus, la teneur en eau à l'échappement diminue.

Mais en raison de l'augmentation des irréversibilités (la totalité du chauffage est cette fois irréversible), le rendement exergétique diminue.

9.3.3 Effet de la pression maximale

On considère à présent l'effet d'une augmentation de pression maximum, à température maximum et à pression de condenseur constantes.

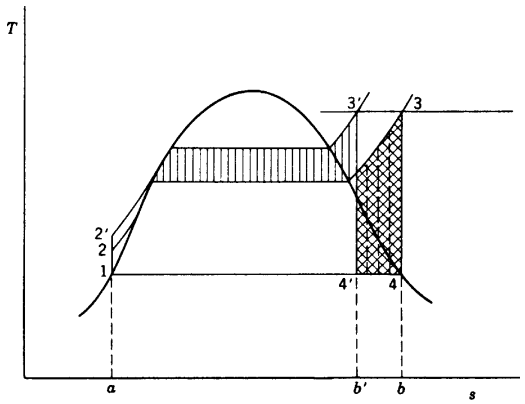


FIG. 9.6 – Effet de la pression maximale

Le travail net augmente de la surface hachurée verticalement et diminue de la surface aux hachures croisées, de sorte qu'il reste à peu près constant. Par ailleurs, la chaleur rejetée diminue

de l'aire $4' - 4 - b - b' - 4'$, de sorte que l'efficacité et le rendement exergétique augmentent tous deux.

Mais la teneur en eau à l'échappement augmente.

9.4 Le cycle à resurchauffe

On vient de voir que l'augmentation de la pression maximum est favorable à l'efficacité du cycle de Rankine-Hirn, mais qu'elle entraîne une augmentation de la teneur en eau à l'échappement. On évite ce problème en procédant à une ou plusieurs resurchauffes.

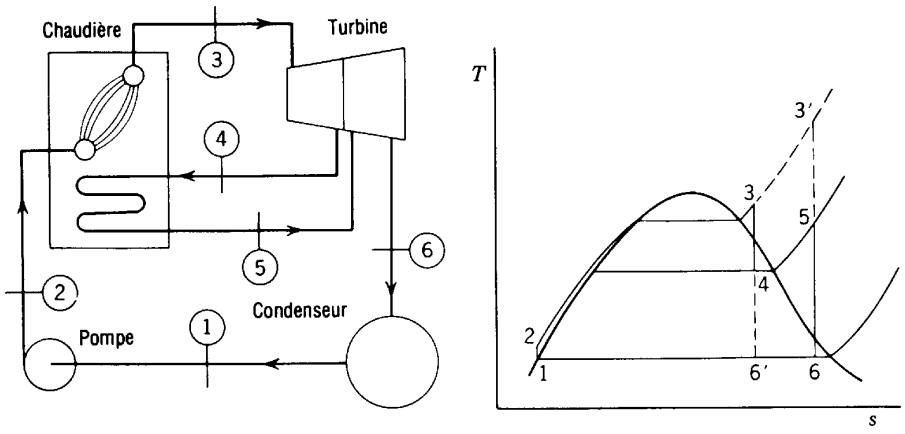


FIG. 9.7 – Le cycle à resurchauffe

L'efficacité du cycle ne varie pratiquement pas, mais la teneur en eau à l'échappement diminue.

9.5 Le cycle à soutirage

La perte d'efficacité du cycle de Rankine-Hirn par rapport au cycle de Carnot provient de la production d'entropie dans la phase de chauffage. Afin de réduire cette production, on prélève une partie du débit dans la turbine à une pression intermédiaire qu'on utilise pour réchauffer l'eau à la sortie de la pompe.

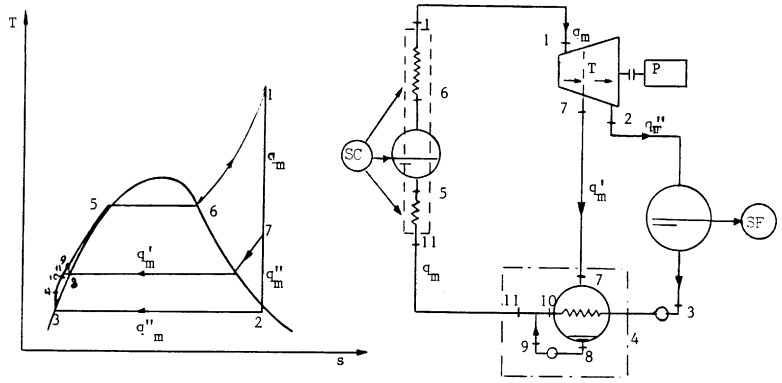


FIG. 9.8 – Le cycle à soutirage

En négligeant la puissance consommée par la pompe

$$\varepsilon_{\mathrm{RH}} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_4}$$

alors que l'efficacité du cycle avec soutirage vaut

$$\varepsilon_{\mathrm{RH,\ sout.}} = \frac{q''_m(h_1 - h_2) + q'_m(h_1 - h_7)}{(q'_m + q''_m)(h_1 - h_{11})}$$

En négligeant la puissance de la pompe auxiliaire, on a par application du premier principe au système entouré d'un trait mixte

$$(q'_m + q''_m)h_{11} = q'_m h_7 + q''_m h_4 \quad \rightarrow \quad q'_m(h_7 - h_{11}) = q''_m(h_{11} - h_4)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{RH,\ sout.}} &= \frac{q''_m(h_1 - h_2) + q'_m(h_1 - h_7)}{(q'_m + q''_m)(h_1 - h_{11})} \\
&= \frac{q''_m(h_1 - h_2) + q'_m(h_1 - h_7)}{q''_m(h_1 - h_4) + q''_m(h_4 - h_{11}) + q'_m(h_1 - h_{11})} \\
&= \frac{q''_m(h_1 - h_2) + q'_m(h_1 - h_7)}{q''_m(h_1 - h_4) - q'_m(h_7 - h_{11}) + q'_m(h_1 - h_{11})} \\
&= \frac{q''_m(h_1 - h_2) + q'_m(h_1 - h_7)}{q''_m(h_1 - h_4) + q'_m(h_1 - h_7)} \\
&= \frac{(h_1 - h_2) + \frac{q'_m}{q''_m}(h_1 - h_7)}{(h_1 - h_4) + \frac{q'_m}{q''_m}(h_1 - h_7)} \\
&> \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_4} = \varepsilon_{\mathrm{RH}} \qquad (9.2)
\end{aligned}$$

car $h_1 - h_7 > 0$ et $\varepsilon_{\mathrm{RH}} < 1$, ce qui démontre l'effet positif du soutirage sur l'efficacité.

En pratique, on utilise plusieurs soutirages et des réchauffeurs d'eau à mélange pour éviter la multiplication des pompes, comme illustré dans le schéma.

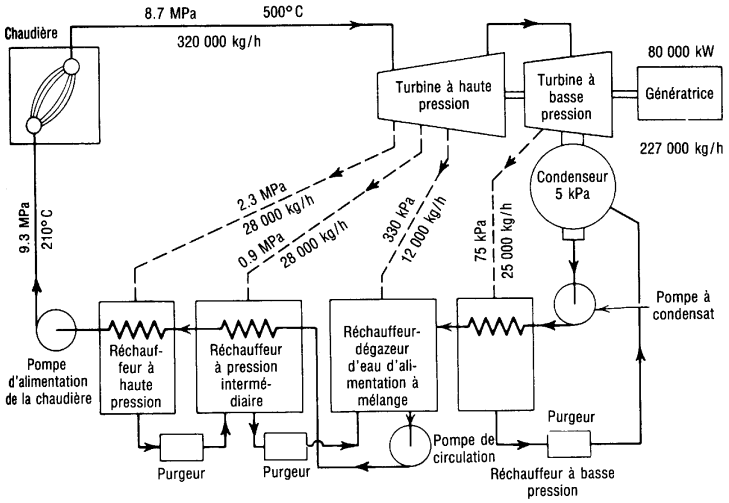


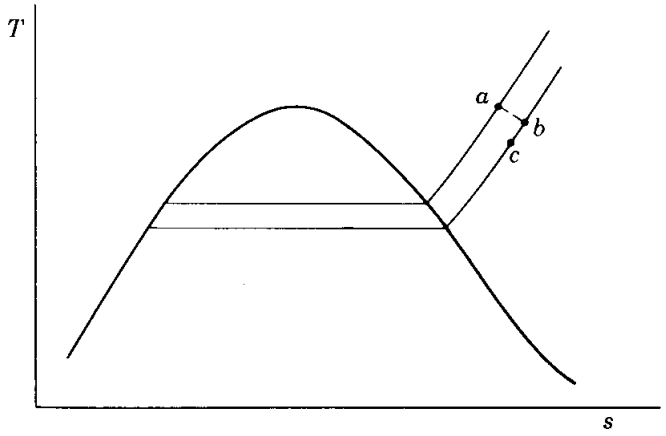
FIG. 9.9 – Le cycle à soutirage 2

9.6 Ecarts entre les cycles réels et les cycles idéaux

Evidemment, les cycles réels s'écartent des cycles idéaux. Examinons brièvement les origines de ces écarts.

9.6.1 Pertes en tuyauterie

Les pertes en tuyauterie sont de deux types : pertes de charge dues à la dissipation visqueuse, et transfert de chaleur vers l'ambiance. On les représente dans le diagramme entropique ci-dessous.



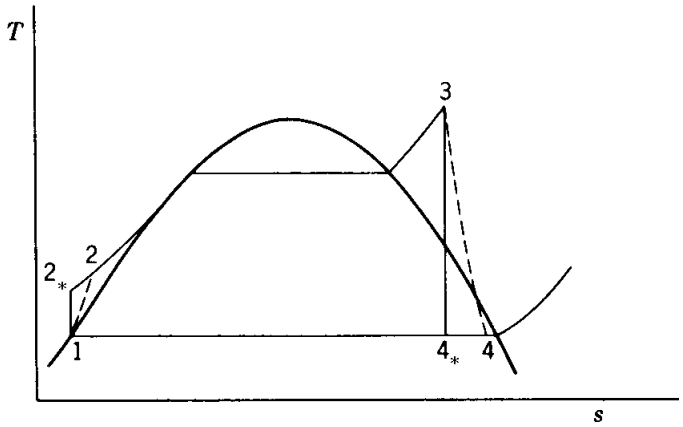
$a - b$: perte de charge. $h_b = h_a$ $(q = w = 0)$ et $p_b < p_a$.

$b - c$ transfert de chaleur. $h_b < h_a$ $(q < 0)$, et $p_b = p_a$.

FIG. 9.10 – Pertes en tuyauterie

9.6.2 Pertes dans la turbine et dans la pompe

Il s'agit essentiellement de pertes par dissipation visqueuse, que l'on peut caractériser par les rendements isentropiques respectifs.



- $\eta_t = \dfrac{w_t}{h_3 - h_{4_*}}$
- $\eta_p = \dfrac{h_{2_*} - h_1}{w_p}$

FIG. 9.11 – Pertes dans la turbine et dans la pompe

9.6.3 Pertes dans le condenseur

Les pertes dans le condenseur sont mineures. Une telle perte est le refroidissement du liquide sous sa température de saturation à la sortie du condenseur.

9.7 Les cycles théoriques à air

Bon nombre de moteurs emploient un fluide actif toujours à l'état gazeux.
- moteurs volumétriques à allumage commandé (moteurs à essence) ;
- moteurs volumétriques à allumage spontané (moteurs Diesel) ;
- turbines à gaz de propulsion (turbopropulseurs, moteurs d'hélicoptères) ;
- turboréacteurs.

Dans tous ces moteurs, la composition du gaz varie entre l'entrée et la sortie en raison de la combustion du carburant. C'est pour cette raison qu'on les appelle *moteurs à combustion interne*. Par contre, la machine à vapeur ou le générateur de puissance d'une centrale à vapeur sont des *moteurs à combustion externe*.

Des moteurs à combustion externe utilisant un agent à l'état gazeux ont été étudiés (combinaison réacteur nucléaire/turbine à gaz), mais leur application reste très limitée.

En raison du changement de composition, mais aussi parce qu'il s'agit réellement de systèmes ouverts dans lesquels l'état à l'échappement diffère de l'état à l'aspiration, les moteurs à combustion interne ne sont pas des cycles.

Néanmoins, pour faciliter l'étude de ces dispositifs, il est s'avère intéressant de les modéliser par des cycles ayant les propriétés suivantes :

1. Une masse fixe d'air parcourt le cycle, et l'air est considéré comme un gaz parfait.
2. La combustion est remplacée par un échange de chaleur provenant d'une source externe.
3. Le cycle se complète par un échange de chaleur avec le milieu ambiant (au lieu des processus d'admission et d'échappement réels).
4. Toutes les transformations sont réversibles intérieurement.
5. En outre, on suppose souvent que la chaleur massique est constante.

9.8 Le cycle de Joule (Brayton)

Le cycle de Joule se compose des mêmes transformations que le cycle de Rankine (2 échanges de chaleur isobares et deux variations de pression isentropiques), la seule différence étant que le fluide actif reste toujours à l'état gazeux. C'est le cycle idéal de la turbine à gaz.

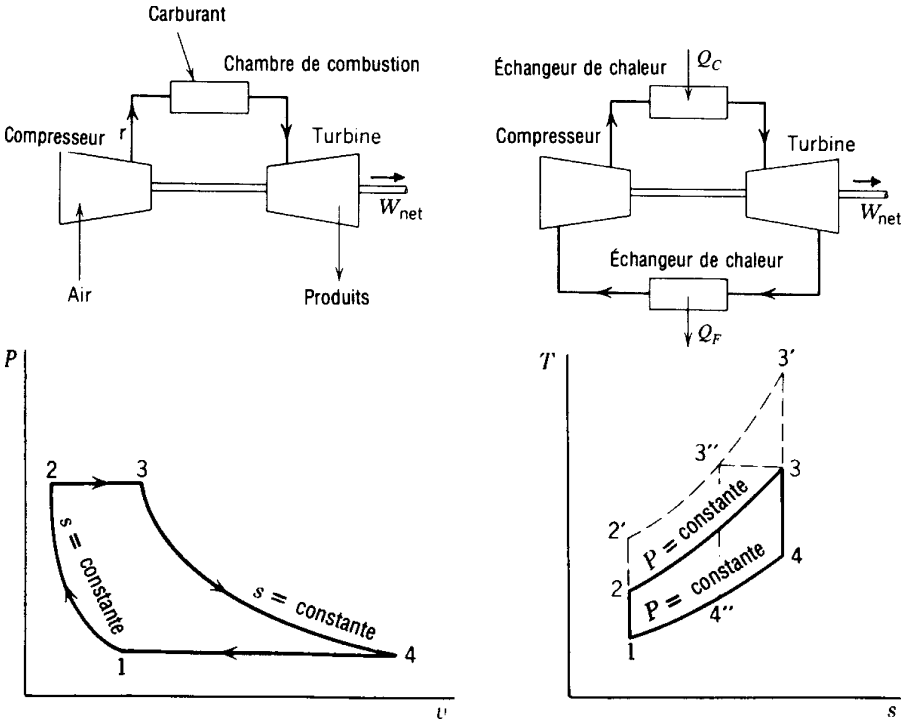


FIG. 9.12 – Le cycle de Joule (Brayton)

Avec l'hypothèse de chaleurs massiques constantes, on obtient très aisément l'expression de l'efficacité thermique.

$$\varepsilon_{\text{th}} = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{h_3 - h_2} = 1 - \frac{h_4 - h_1}{h_3 - h_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

Les transformations $1 - 2$ et $3 - 4$ étant isentropiques, on a

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \Pi^{\frac{k-1}{k}}$$

de sorte que

$$\varepsilon_{\text{th}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \Pi^{-\frac{k-1}{k}} < 1 - \frac{T_1}{T_3} = \varepsilon_{\text{th, Carnot}} \tag{9.3}$$

L'efficacité est donc une fonction croissante du rapport de pression.

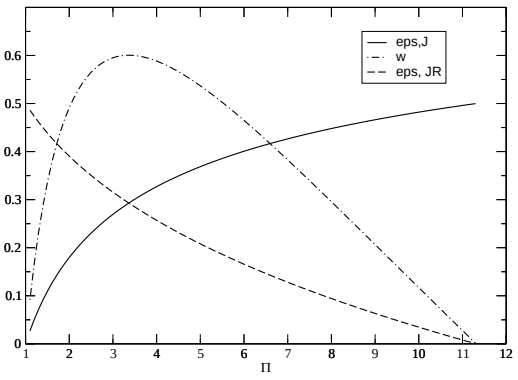


FIG. 9.13 – dispositif cylindre/piston

Ceci s'explique aisément à partir du diagramme entropique. Lorsque le rapport de pression augmente (avec un rapport de température entrée turbine/sortie compresseur constant), le cycle original se transforme en $1-2'-3'-4-1$, pour lequel le travail est plus grand, alors que la chaleur rejetée à la source froide est identique.

Mais la température maximum est plus élevée. En pratique, la température d'entrée turbine est limitée par la tenue des matériaux.

En maintenant la température d'entrée turbine constante, mais en augmentant le rapport de pression, on obtient le cycle $1-2"-3''-4''-1$. Comme l'efficacité thermique ne dépend que du rapport de pression, ce dernier cycle a une efficacité identique à celle du cycle $1-2'-3'-4-1$.

Mais le travail massique est plus faible. Calculons ce dernier.

$$w = (h_3 - h_4) - (h_2 - h_1) = c_p T_1 \left[\frac{T_3}{T_1}(1 - \Pi^{-\frac{k-1}{k}}) - (\Pi^{\frac{k-1}{k}} - 1) \right]$$

On a porté sur le graphique du rendement w/RT_1 en fonction du rapport de pression pour un rapport de températures $T_3/T_1 = 2$. On constate qu'il passe par un maximum. Posons

$$y = \Pi^{\frac{k-1}{k}}$$

On a par conséquent

$$\frac{1}{c_p T_1}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = \frac{T_3}{T_1}\frac{1}{y^2} - 1 \quad \rightarrow \quad y_{w_{\max}} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}} \quad \rightarrow \quad \Pi_{w_{\max}} = \sqrt{\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}} \tag{9.4}$$

et l'efficacité correspondante vaut

$$\varepsilon_{\mathrm{th}} = 1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}} \tag{9.5}$$

Un inconvénient majeur du cycle de Joule est l'importance du travail de compression par rapport au travail de détente (en contraste avec le cycle de Rankine-Hirn), de sorte que la puissance installée est beaucoup plus élevée que la puissance utile. Cet effet est très aggravé par les pertes des machines.

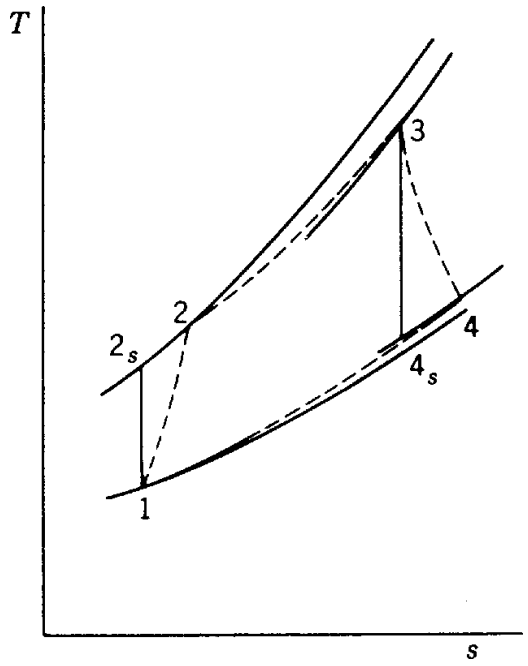


FIG. 9.14 – cycle de Joule 2

Le travail de compression est augmenté alors que le travail fourni par la turbine est réduit → le travail utile diminue très rapidement avec les pertes !

9.9 Le cycle de Joule à récupération

Lorsque la température de sortie turbine est supérieure à la température de sortie compresseur, on peut améliorer l'efficacité du cycle de Joule en se servant des gaz d'échappement pour réchauffer le gaz sortant du compresseur.

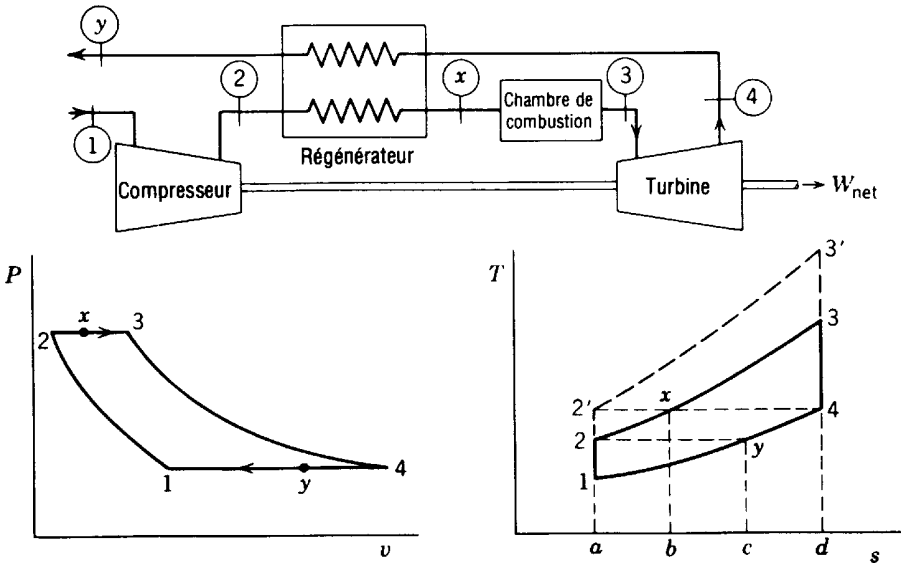


FIG. 9.15 – Le cycle de Joule à récupération

En supposant les chaleurs massiques constantes et un échangeur de chaleur parfait, $T_x = T_4$

et $T_y = T_2$. Dès lors,

$$\varepsilon_{\text{th}} = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{h_3 - h_4} = 1 - \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_4} = 1 - \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4} = 1 - \frac{T_1}{T_3}\Pi^{\frac{k-1}{k}} > \varepsilon_{\text{J}} \qquad (9.6)$$

comme on peut le voir sur le graphique du rendement pour $T_3/T_1 = 2$.

Le cycle à récupération n'a de sens que lorsque $T_4 > T_2$, c.-à-d. pour un rapport de pression tel que

$$\Pi^{\frac{k-1}{k}} < \frac{T_3}{T_1}\Pi^{-\frac{k-1}{k}} \quad \rightarrow \quad \Pi < \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{k}{2(k-1)}} = \Pi_{w_{\max}}$$

En pratique, l'échangeur n'est pas parfait, et par conséquent $T_x < T_4$. On caractérise le degré de perfection de l'échangeur par un rendement, défini comme suit :

$$\eta_{\text{éch.}} = \frac{h_x - h_2}{h_4 - h_2}$$

Le rendement d'échangeur influence l'efficacité du cycle à récupération.

9.10 Le cycle de Joule à compression et détente étagées, et récupération

On a mentionné précédemment que le travail de compression était réduit pour une compression refroidie. Cette propriété est mise à profit dans le cycle de Joule à compression et détente étagée, en combinaison avec la récupération.

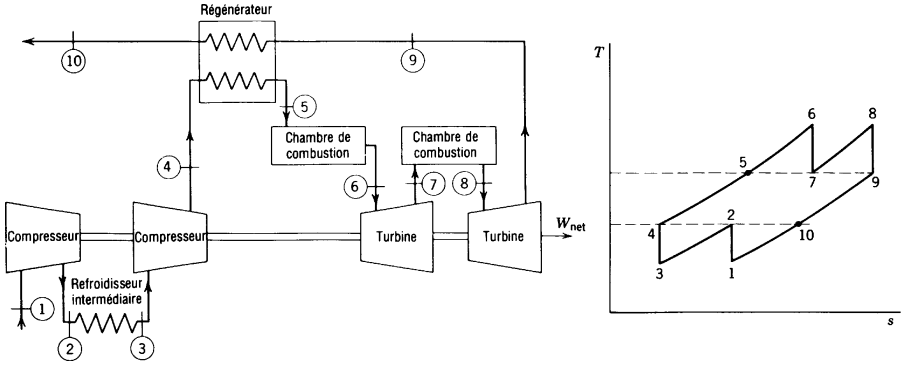


FIG. 9.16 – Le cycle de Joule à compression et détente étagées, et récupération

L'efficacité du cycle est augmentée, mais également le prix et le poids de l'installation, vu sa plus grande complication.

En augmentant le nombre de compressions et de détentes, on s'approche du cycle d'Ericsson (voir prochaine section). En pratique, il n'est pas économique d'aller au-delà de 2 ou 3 étages[1].

[1]Le code de ce syllabus étant en partie fournit par Degrez, je rajoute le texte qu'il avait décidé de ne pas mettre. Je le signalerai chaque fois

9.11 Le cycle du turboréacteur

Le cycle du turboréacteur est également une variante du cycle de Joule, dans laquelle on effectue une détente partielle dans la turbine, de manière à ce que la puissance fournie par la turbine soit juste suffisante à entraîner le compresseur. Les gaz à la sortie de la turbine sont alors détendus dans une tuyère pour être accélérés et ainsi produire une poussée.

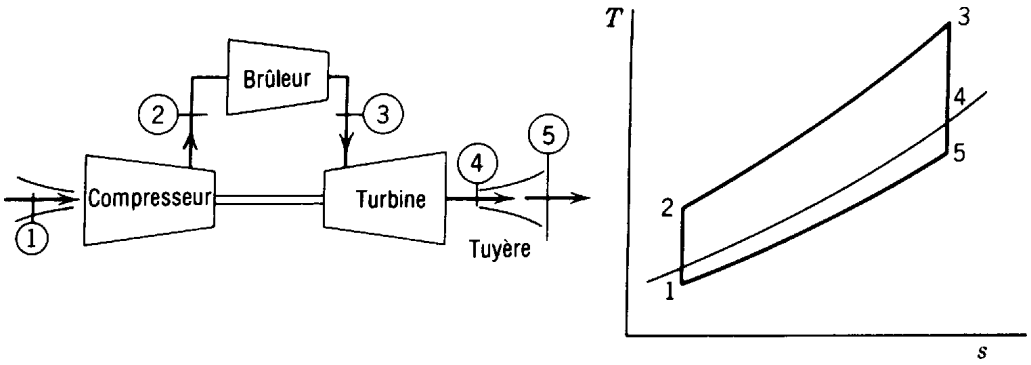


FIG. 9.17 – Le cycle du turboréacteur

9.12 Le cycle d'Ericsson

En faisant tendre le nombre d'étages de compression et de détente dans le cycle de Joule à compression et détente étagées (section 9.10) vers l'infini, on obtient le cycle d'Ericsson, constitué d'une compression et d'une détente isotherme, et d'échanges de chaleur isobares.

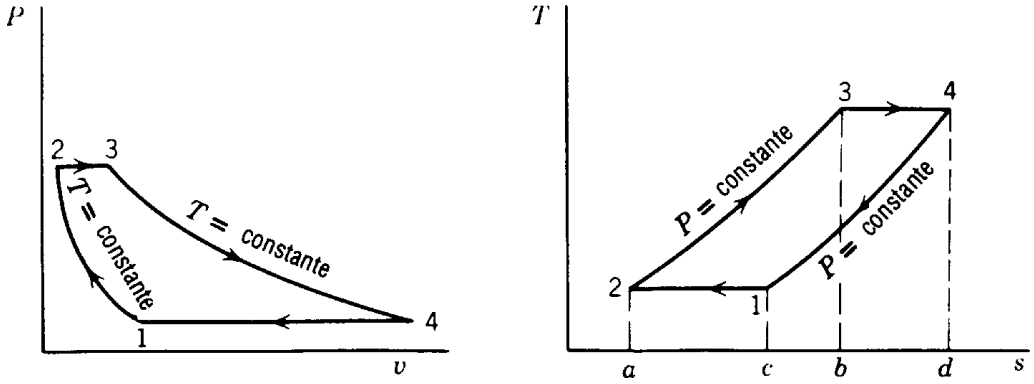


FIG. 9.18 – Le cycle d'Ericsson

Les quantité de chaleur et travail échangés au cours des quatre parties du cycle sont :

Compression isotherme $1-2$ $w_{12} = \underbrace{(h_2 - h_1)}_{=0 \text{ (gaz parfait)}} - q_{12}$, et, en supposant l'échange de chaleur réversible,

$$q_{12} = T_F(s_2 - s_1) < 0$$

Chauffage isobare $2-3$ $q_{23} = h_3 - h_2$

Détente isotherme $3-4$ $w_{34} = \underbrace{(h_4 - h_3)}_{=0 \text{ (gaz parfait)}} - q_{34}$, et, en supposant l'échange de chaleur réversible,

$$q_{34} = T_C(s_4 - s_3) > 0$$

Refroidissement isobare $4-1$ $q_{41} = h_1 - h_4$

On a donc $q_{23} = -q_{41}$, de sorte qu'on peut réaliser ces transformations à l'aide d'un échangeur de chaleur (récupérateur).

Le travail net fourni vaut donc

$$w^* = T_C(s_4 - s_3) - T_F(s_1 - s_2)$$

Mais, le fluide actif étant un gaz parfait,

$$s_4 - s_3 = -R \ln \frac{p_4}{p_3} = -R \ln \frac{p_1}{p_2} = s_1 - s_2$$

et par conséquent,

$$w^* = (T_C - T_F)(s_4 - s_3)$$

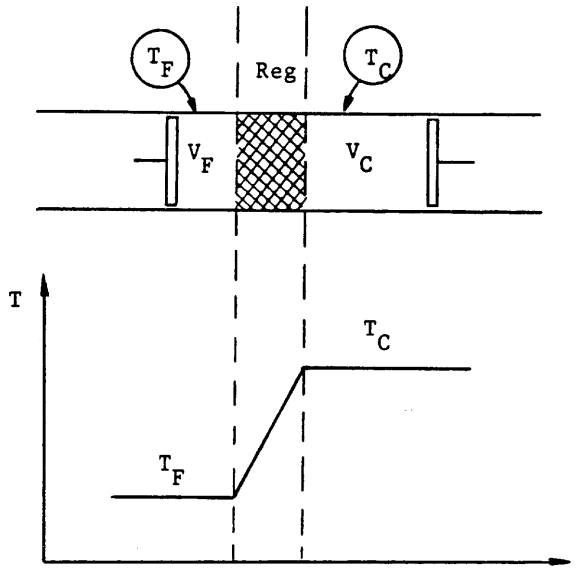
de sorte que l'efficacité thermique vaut

$$\varepsilon_E = \frac{(T_C - T_F)(s_4 - s_3)}{T_C(s_4 - s_3)} = \frac{T_C - T_F}{T_C} = \varepsilon_{\text{Carnot}} \tag{9.7}$$

En réalité, il est impossible en pratique de réaliser des compressions et détentes isothermes. On s'en approche par des compressions et détentes étagées avec échange de chaleur intermédiaire (intercoolers).

9.13 Le cycle de Stirling

Le cycle de Stirling est un autre cycle basé sur l'utilisation d'un régénérateur (récupérateur), mis en oeuvre dans une machine volumétrique constituée des trois parties suivantes :

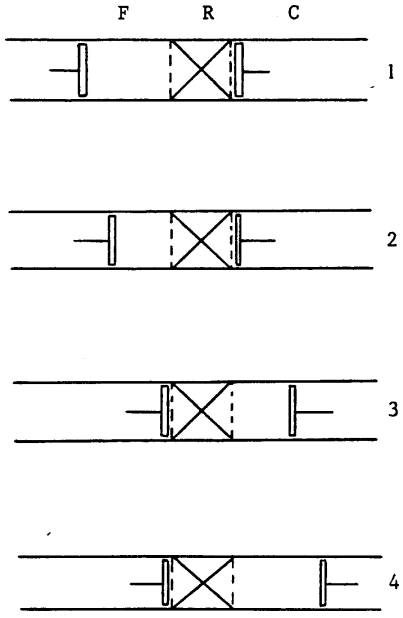


- une chambre de volume variable V_F en contact avec une source à température T_F ;
- une chambre de volume variable V_C en contact avec une source à température T_C ;
- un régénérateur qui reçoit et fournit alternativement de la chaleur du et au fluide.

C'est une machine fermée dans laquelle le fluide est à chaque instant non uniforme.

FIG. 9.19 – Le cycle de Stirling

Le cycle est constitué des quatre transformations suivantes :



Compression isotherme $1-2$
$_1W_2 = -\int_1^2 p\mathrm{d}V = -mRT_F \ln(V_2/V_1) > 0$ et $_1Q_2 = -_1W_2 = mRT_F \ln(V_2/V_1) < 0$

Chauffage isochore $2-3$ $_2W_3 = 0$ et
$_2Q_3 = U_3 - U_2 = mc_v(T_C - T_F)$

Détente isotherme $3-4$
$_3W_4 = -\int_3^4 p\mathrm{d}V = -mRT_C \ln(V_4/V_3) < 0$ et $_3Q_4 = -_3W_4 = mRT_C \ln(V_4/V_3) > 0$

Refroidissement isochore $4-1$
$_4W_1 = 0$ et
$_4Q_1 = U_4 - U_1 = mc_v(T_F - T_C)$

FIG. 9.20 – Transformation du cycle de Stirling

On constate que $_1Q_2 = -_4Q_1$, de sorte que les échanges peuvent s'effectuer sans contact avec une source, mais par l'entremise du régénérateur, qui stocke la chaleur cédée par le fuide en $4-1$ pour la lui rétrocéder en $2-3$.

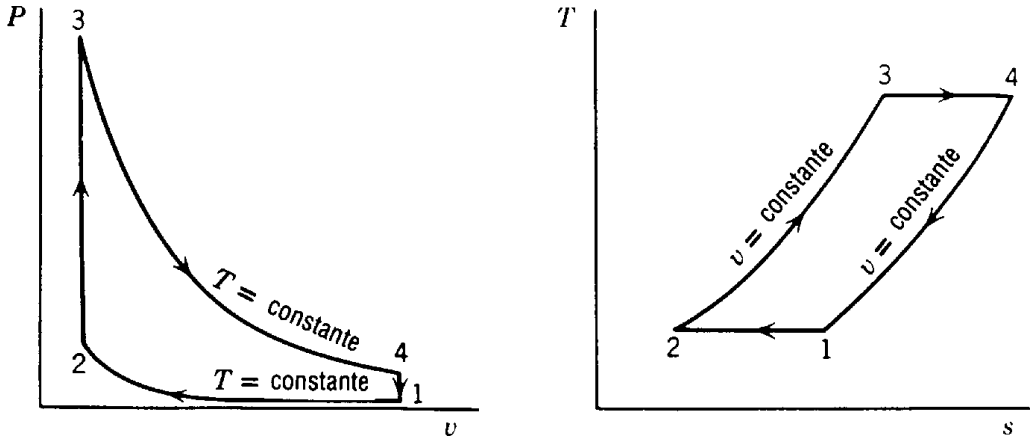


FIG. 9.21 – Le cycle de Stirling

L'efficacité du cycle vaut

$$\varepsilon_{\text{Stirling}} = \frac{-{}_3W_4 - {}_1W_2}{{}_3Q_4} = \frac{mRT_C \ln \frac{V_4}{V_3} + mRT_F \ln \frac{V_2}{V_1}}{mRT_C \ln \frac{V_4}{V_3}} = \frac{T_C - T_F}{T_C} = \varepsilon_{\text{Carnot}} \tag{9.8}$$

On a constaté un regain d'intérêt récent pour les machines de Stirling (travaux de la firme Phillips). Dans les réalisations récentes, le mouvement discontinu des pistons est remplacé par des mouvements sinusoïdaux déphasés. La source chaude est un bréleur dans lequel on réalise la combustion *externe* d'un combustible.

Avantages et inconvénients

- Efficacité thermique élevée (en principe égale à l'efficacité de Carnot) ;
- combustion externe, donc moteur silencieux et polycarburant ;
- poids et prix élevés, en raison de la complexité de la cinématique ;
- puissance volumétrique très importante, grâce à la possibilité de travailler à très haute pression ;
- régulation aisée par action sur la masse (m) du fluide actif.

9.14 Le cycle d'Otto ou de Beau de Rochas

Le cycle d'Otto est le cycle idéalisé des moteurs volumétriques à allumage commandé (moteur à essence). Il est représenté ci-dessous dans les diagrammes $p - v$ et $T - s$.

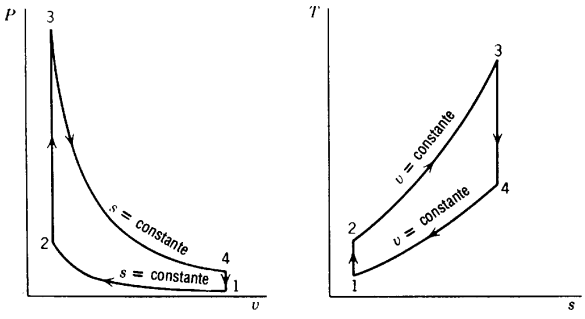


FIG. 9.22 – Le cycle d'Otto

Il se compose des transformations suivantes :

Compression isentropique $1-2$ Correspond à la compression du mélange air/essence lorsque le piston se déplace du point mort bas au point mort haut, les soupapes étant fermées.

$$ {}_1Q_2 = 0 \qquad {}_1W_2 = U_2 - U_1 = mc_v(T_2 - T_1) $$

Chauffage isochore $2-3$ Correspond à la phase de combustion du mélange, supposée instantanée lorsque le piston se trouve au point mort haut.

$$ {}_2W_3 = 0 \qquad {}_2Q_3 = U_3 - U_2 = mc_v(T_3 - T_2) $$

Détente isentropique $3-4$ Correspond à la détente des gaz brélés lorsque le piston se déplace du point mort haut au point mort bas.

$$ {}_3Q_4 = 0 \qquad {}_3W_4 = U_4 - U_3 = mc_v(T_4 - T_3) $$

Refroidissement isochore $4-1$ Correspond aux processus suivants : détente irréversible des gaz brélés à l'ouverture de la soupape d'échappement, refoulement des gaz brélés, et enfin admission des gaz frais.

$$ {}_4W_1 = 0 \qquad {}_4Q_1 = U_1 - U_4 = mc_v(T_1 - T_4) $$

On en déduit directement l'efficacité du cycle :

$$ \begin{aligned} \varepsilon_{\text{Otto}} &= \frac{-{}_3W_4 - {}_1W_2}{{}_2Q_3} = \frac{mc_v(T_3 - T_4) - mc_v(T_2 - T_1)}{mc_v(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \\ &= 1 - \frac{V_1}{V_2}^{-(k-1)} = 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} \end{aligned} \tag{9.9} $$

où r_v est le rapport volumétrique de compression. L'efficacité est donc une fonction croissante de celui-ci comme indiqué sur le graphique.

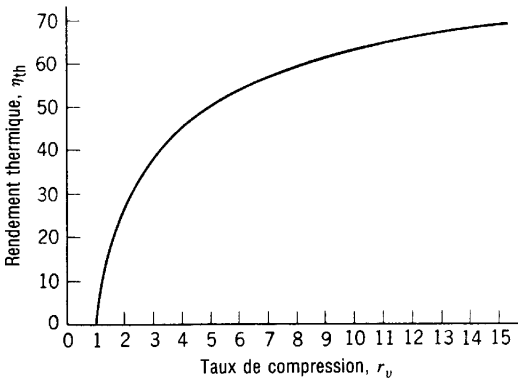


FIG. 9.23 – Efficacité du cycle d'Otto

En pratique, l'augmentation du rapport de compression est limitée par le risque de détonation qui augmente avec le rapport de compression. La détonation est une combustion extrêmement rapide, qui s'accompagne de fortes ondes de pression dans le cylindre (cliquetis).

Les écarts principaux entre le cycle idéal et la transformation ouverte réelle sont :

1. les chaleurs massiques varient avec T (peut être modélisé) ;
2. la combustion peut être incomplète ;
3. la transformation $4-1$ est en réalité composée des phases de refoulement et d'admission qui, en raison des pertes de charge au travers des soupapes, nécessitent un certain travail ;
4. la détente des gaz brélés s'accompagne d'un échange de chaleur vers le liquide de refroidissement à travers les parois du cylindre ;
5. les processus comportent des irréversibilités dues aux gradients de pression et de température.

9.15 Le cycle de Diesel

Le cycle de Diesel est le cycle idéalisé des moteurs volumétriques à allumage spontané (moteur Diesel). Il diffère du cycle d'Otto par le fait que le processus de combustion, nettement plus lent pour le brouillard de gouttelettes de gazole que pour le mélange air/essence, est supposé isobare.

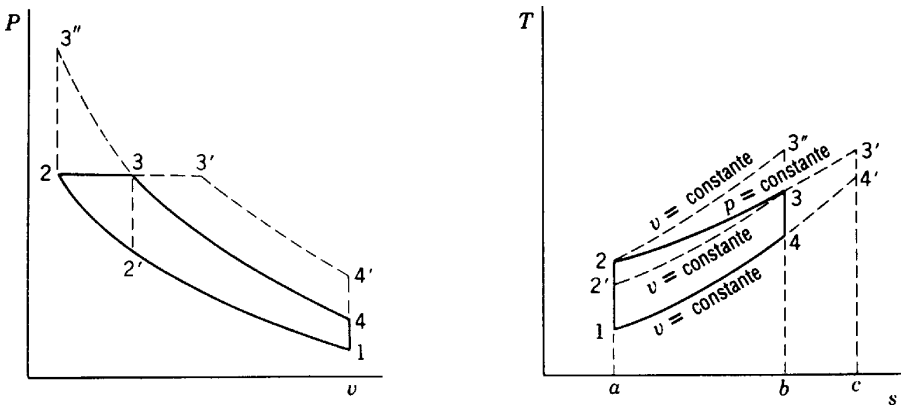


FIG. 9.24 – Le cycle de Diesel

Les quantités de chaleur et de travail échangées au cours des 4 transformations sont :

Compression isentropique $1-2$ $\quad {}_1Q_2 = 0 \quad {}_1W_2 = U_2 - U_1 = mc_v(T_2 - T_1)$

Chauffage isobare $2-3$ $\quad {}_2W_3 = -p_2(V_3 - V_2) \quad {}_2Q_3 = H_3 - H_2 = mc_p(T_3 - T_2)$

Détente isentropique $3-4$ $\quad {}_3Q_4 = 0 \quad {}_3W_4 = U_4 - U_3 = mc_v(T_4 - T_3)$

Refroidissement isochore $4-1$ $\quad {}_4W_1 = 0 \quad {}_4Q_1 = U_1 - U_4 = mc_v(T_1 - T_4)$

L'efficacité du cycle vaut donc

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{diesel}} &= \frac{-{}_2W_3 - {}_3W_4 - {}_1W_2}{{}_2Q_3} = \frac{(H_3 - H_2) - (U_3 - U_2) + (U_3 - U_4) - (U_2 - U_1)}{H_3 - H_2} \\ &= 1 - \frac{U_4 - U_1}{H_3 - H_2} = 1 - \frac{c_v}{c_p}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}\end{aligned}$$

Outre le rapport volumétrique de compression r_v introduit précédemment, le rapport volumétrique de combustion

$$r_c = \frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

influence également l'efficacité du cycle, comme on peut le voir aisément à l'examen du diagramme entropique. En augmentant la température de fin de combustion de T_3 à $T_{3'}$, la quantité de chaleur requise augmente de l'aire $3-3'-c-b-3$ alors que le travail n'augmente que de l'aire $3-3'-4'-4-3$.

Ceci se confirme en développant l'expression de l'efficacité.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{diesel}} &= 1 - \frac{c_v}{c_p}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{k}\frac{\frac{T_4}{T_2} - \frac{T_1}{T_2}}{r_c - 1} \\ &= 1 - \frac{1}{k}\frac{\frac{T_4}{T_3}\frac{T_3}{T_2} - r_v^{1-k}}{r_c - 1} = 1 - \frac{1}{k}\frac{\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{k-1} r_c - r_v^{1-k}}{r_c - 1} = 1 - \frac{1}{k}\frac{\left(\frac{r_c}{r_v}\right)^{k-1} r_c - r_v^{1-k}}{r_c - 1} \\ &= 1 - \frac{r_c^k - 1}{r_v^{k-1}k(r_c - 1)} < 1 - \frac{1}{r_v^{k-1}} = \varepsilon_{\text{Otto}} \qquad (9.10)\end{aligned}$$

à rapport volumétrique de compression identique. On a porté l'efficacité du cycle Diesel en fonction du rapport de compression pour différents rapports de combustion ci-après.

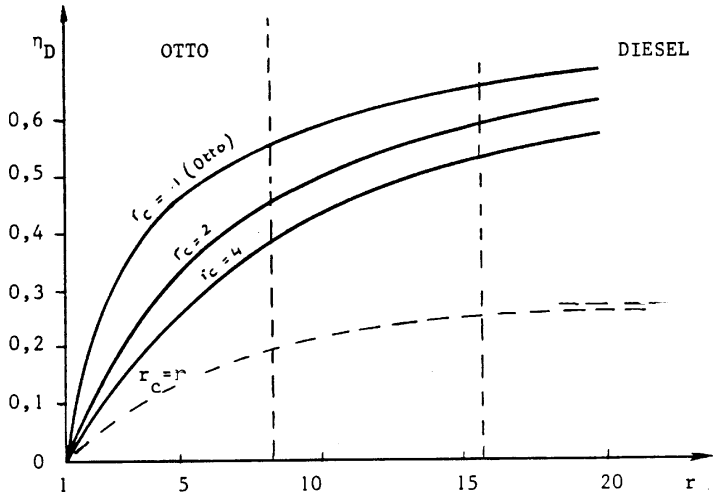


FIG. 9.25 – Efficacité du cycle Diesel en fonction du rapport de compression pour différents rapports de combustion

En pratique toutefois, du fait que dans un moteur Diesel on comprime de l'air pur, on ne risque pas la détonation, et l'on peut donc utiliser un rapport de compression plus élevé. Si l'on compare un cycle d'Otto et un cycle de Diesel de même pression et température maximales (cycles $1-2-3-4-1$ et $1-2'-3-4-1$ dans le diagramme entropique), il est clair que le cycle Diesel est plus efficace. puisque toute la chaleur supplémentaire requise (aire $2' - 2 - 3 - 2'$) est transformée en travail.

9.16 Considérations additionnelles sur les cycles d'Otto et de Diesel

9.16.1 Moteurs à quatre et à deux temps

Les cycles d'Otto et de Diesel sont le plus fréquemment réalisés dans des moteurs *à quatre temps*, ainsi nommé parce que le cycle complet requiert quatre courses du piston.

Il est toutefois possible de réaliser les phases d'admission et de refoulement beaucoup plus rapidement en soufflant les gaz brélés par du mélange frais lorsque le piston est au voisinage du point mort bas. Cette opération requiert une puissance auxiliaire, de sorte que l'efficacité est réduite, mais la puissance développée par cycle est théoriquement doublée. Cet avantage peut être décisif lorsque la compacité et le poids sont importants.

9.16.2 Cycles mixtes

Théoriquement, on peut imaginer fractionner la phase de combustion en une partie à volume constant et une autre à pression constante, réalisant de la sorte un cycle mixte.

En pratique, les cycles réels sont toujours intermédiaires entre les cycles théoriques d'Otto et de Diesel, se rapprochant plus de l'un ou de l'autre selon la vitesse de rotation, la nature du combustible, et le fractionnement de la combustion.

9.16.3 Moteurs suralimentés

On peut augmenter considérablement la puissance volumétrique des moteurs à piston en les alimentant à une pression supérieure à la pression atmosphérique à l'aide d'un groupe de suralimentation. Un groupe de suralimentation se compose d'un compresseur qui élève la pression à l'entrée de la machine volumétrique, entraîné par une turbine utilisant les gaz d'échappement. Le rendement du cycle est théoriquement inchangé.

Les groupes de suralimentation sont généralement constitués de turbomachines (compresseur centrifuge et turbine radiale) tournant à une vitesse de rotation beaucoup plus élevée que le moteur volumétrique.

Chapitre 10

Cycles frigorifiques

10.1 Introduction

Dans la section 9.1, on a considéré des machines thermiques constituées de quatre processus distincts, mettant en oeuvre soit des dispositifs à circulation de fluide (systèmes ouverts en régime), soit un système fermé à frontière mobile. Le fluide actif pouvait soit subir des changements de phase ou au contraire rester dans une seule phase au cours du cycle.

On a ensuite traité le cas particulier de dispositifs à circulation de fluide constitués de deux échanges de chaleur isobares et de deux variations de pression adiabatiques, et donc isentropiques.

On considère à présent le cycle de réfrigération idéal constitué exactement des mêmes processus, si ce n'est qu'ils sont parcourus en sens inverse, de sorte que sa représentation dans un diagramme $p - v$ est la suivante.

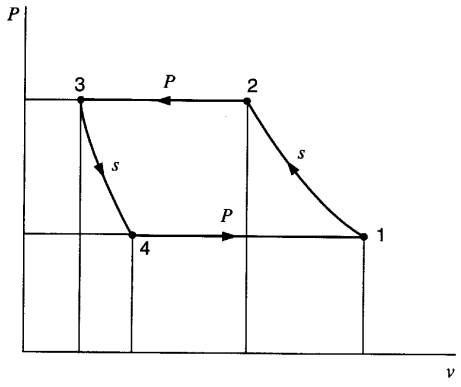


FIG. 10.1 – Cycles frigorifiques

Si le cycle est entièrement à l'intérieur de la cloche de saturation, il s'agit d'un cycle de Carnot, comme dans le cas des cycles moteurs. Cette fois encore, le travail net reçu est l'aire à l'intérieur de la courbe décrite par le cycle, que les transformations aient lieu dans un dispostif à circulation de fluide ou dans un système fermé à frontière mobile.

En principe, tout cycle moteur inversé peut être utilisé pour réaliser une machine firgorifique. En pratique, seuls quelques uns sont utilisés, à savoir, par ordre d'importance, les cycles de Rankine-Hirn, de Joule, et de Stirling-Ericsson.

En outre, il existe des cycles frigorifiques à trois sources de chaleur (trithermes), qui permettent un fonctionnement sans apport de travail : les machines à absorption.

On peut classer les machines frigorifiques selon les applications et les plages de température correspondantes :

De l'ambiance à 5-10 °C : conditionnement d'air, applications alimentaires, ...

De +10 °C à -18 °C : conservation des denrées alimentaires, production de glace, congélation.

De -18 °C à ∼-40 °C : surgélation (conservation de denrées périssables pendant plusieurs mois).

Jusque -200 °C : applications industrielles notamment liées à l'industrie chimique ou alimentaire : liquéfaction de l'air et du gaz naturel, lyophilisation.

Sous -200 °C : En dessous de la température de liquéfaction de l'azote (77 K), on entre dans la zone des très basses températures. Les applications industrielles sont très limitées (propulsion par fusée à hydrogène et oxygène liquide, aimants à très haute induction, ...).

10.2 Cycle frigorifique à compression de vapeur

Le cycle frigorifique idéal à compression de vapeur est représenté ci-dessous.

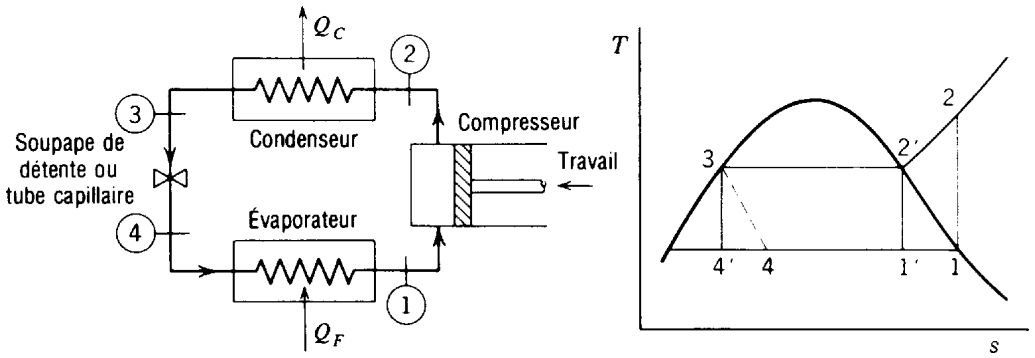


FIG. 10.2 – Cycle frigorifique à compression de vapeur

Il est constitué de quatre transformations : une compression adiabatique et réversible $1-2$, un refroidissement isobare par condensation $2-3$, une détente irréversible sans échange de travail $3-4$, et enfin un échauffement isobare par évaporation $4-1$. Il s'agit essentiellement d'un cycle de Rankine-Hirn inversé, sauf que la pompe est remplacée par une vanne.

10.2.1 Performances

Compression adiabatique et réversible $w = h_2 - h_1$

Refroidissement isobare $q = h_3 - h_2$ $(p = p_{\text{sat}}(T_C))$.

Détente irréversible $h_4 = h_3$

Echauffement isobare $q_F = h_1 - h_4$, grandeur que l'on appelle la *production frigorifique nette (PFN)*. La puissance frigorifique nette $\dot{Q}_F = \dot{m}(h_1 - h_4)$.

L'efficacité frigorifique, ou encore coefficient de performance, vaut

$$\varepsilon_{\text{fr}} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1} \tag{10.1}$$

alors que le rendement exergétique

$$\eta_{ex} = \frac{\varepsilon_{\text{fr}}}{\varepsilon_{\text{fr,Carnot}}} = \varepsilon_{\text{fr}}(\frac{T_C}{T_F} - 1) < 1 \tag{10.2}$$

Le compresseur est le plus souvent de type volumétrique (à piston, à palette ou à vis). Une caractéristique importante est la puissance volumétrique par unité de débit volumétrique aspiré par le compresseur, appelée *production frigorifique volumétrique (PFV)* :

$$\text{PFV} = \frac{q_F}{v_1} = \frac{h_1 - h_4}{v_1}$$

Mais le volume aspiré par le compresseur peut être très différent du volume balayé par le piston, qui conditionne l'encombrement et le prix de la machine. On définit donc le *coefficient de remplissage* k_v comme suit

$$k_v = \frac{\text{volume aspiré}}{\text{volume balayé}}$$

Considérons à titre d'exemple un compresseur volumétrique de volume mort ϵ et de volume balayé V_b. Le gaz restant dans le volume mort à la fin du refoulement occupe après détente à

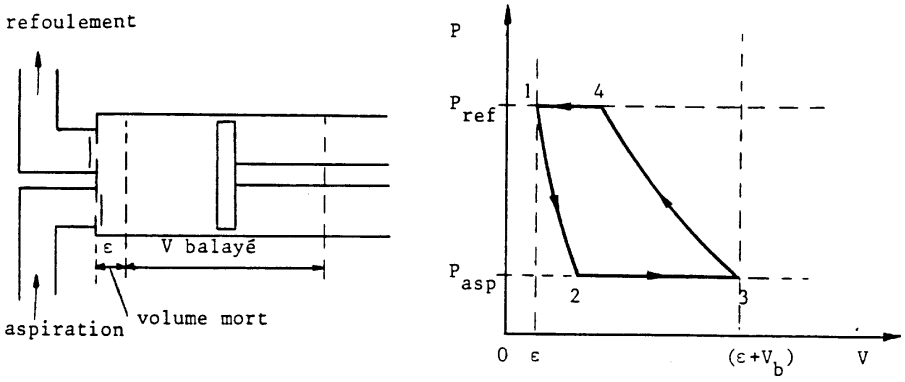


FIG. 10.3 – Compresseur volumétrique de volume mort

la pression d'admission

$$V_2 = \epsilon \left(\frac{p_{\text{ref}}}{p_{\text{adm}}} \right)^{\frac{1}{k}}$$

(détente isentropique de gaz parfait). Le volume aspiré vaut donc

$$V_{\text{asp}} = \epsilon + V_b - V_2 = V_b - \epsilon \left[\left(\frac{p_{\text{ref}}}{p_{\text{adm}}} \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right]$$

de sorte que

$$k_v = 1 - \frac{\epsilon}{V_b} \left[\left(\frac{p_{\text{ref}}}{p_{\text{adm}}} \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right]$$

Il dépend donc des caractéristiques constructives du compresseur, mais aussi du rapport de compression, lié aux températures des sources.

La production frigorifique par unité de volume balayé vaut par conséquent

$$\mathrm{PFV}_b = \mathrm{PFV}\ k_v$$

Elle diminue rapidement avec la température de la source froide, en raison de l'augmentation de v_1 et de la diminution de k_v et finit par s'annuler pour la température telle que $k_v = 0$, qui constitue donc la température minimum de fonctionnement.

10.2.2 Ecarts par rapport au cycle idéal

Les performances des cycles réels sont réduits en raison des écarts suivants par rapport au cycle idéal :

- condenseur non parfait : $T_{\mathrm{cond}} > T_C$;
- évaporateur non parfait : $T_{\mathrm{evap}} < T_F$;
- irréversibilités et échanges de chaleur dans le compresseur ;
- pertes de charge dans les tuyauteries et les échangeurs ;
- surchauffe de la vapeur entre la sortie de l'évaporateur et l'entrée du compresseur due aux défauts d'isolation.

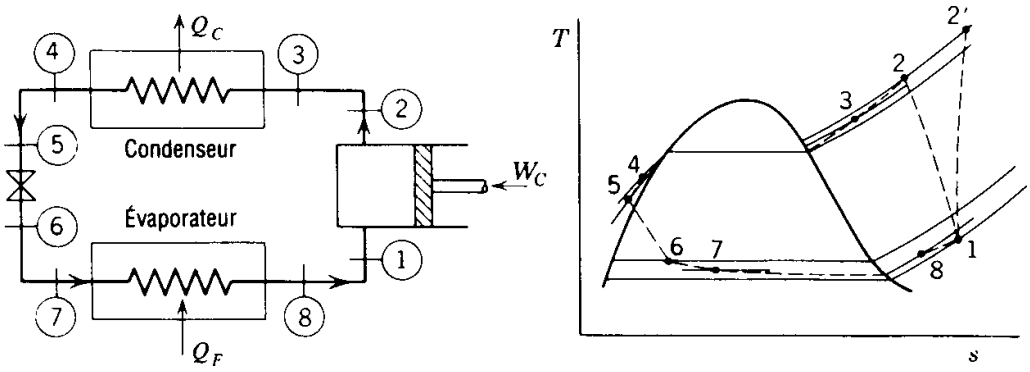


FIG. 10.4 – cycle frigo réel

10.3 Choix du fluide frigorigène

Le choix du fluide frigorigène est dicté par un ensemble de contraintes thermodynamiques et technologiques, dont on va discuter les principales :

Plage de température Le fluide doit être tel que T_F et T_C soient comprises entre le point triple et le point critique. De plus, il est souhaitable que $p_1 = p_{\text{sat}}(T_F)$ soit supérieure à la pression atmosphérique (pour éviter des rentrées d'air dans le système, et pour réduire l'encombrement — PFV$\propto p_1$), et que $p_2 = p_{\text{sat}}(T_F)$ soit inférieure à 2 MPa. Enfin, il est souhaitable d'avoir $p_{\text{cond}}/p_{\text{evap}}$ aussi faible que possible, d'une part pour des raisons de coét du compresseur, et d'autre part pour limiter la température T_2 en fin de compression, qui doit être compatible avec la stabilité thermique et chimique du fluide.

Efficacité frigorifique Il est évidemment avantageux d'avoir une efficacité frigorifique aussi élevée que possible, ce qui implique de maximiser le rendement exergétique. Ce dernier ne dépend que du fluide et des températures des sources.

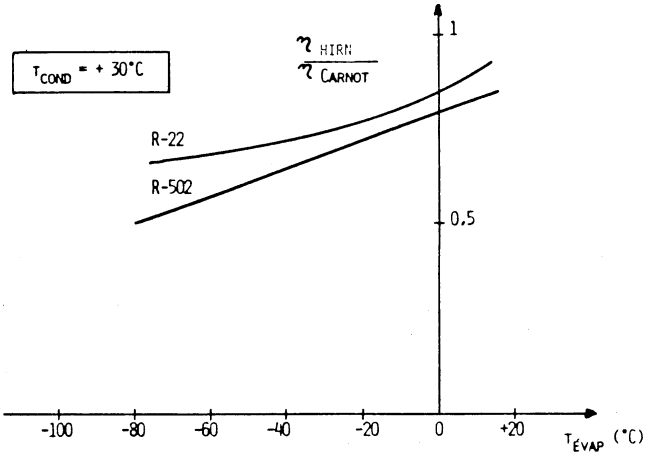


FIG. 10.5 – Efficacité frigorifique

Compatibilité avec les huiles de lubrification Un problème spécifique se pose si la solubilité de l'huile dans le fluide varie fortement avec la température, à savoir la séparation de deux phases liquides dans l'évaporateur.

Toxicité Les fluides sont classés en 6 groupes de toxicité décroissante. Certains fluides employés abondamment dans le passé ont été abandonnés en raison de leur grande toxicité (SO_2). Les réfrigérants utilisés dans les appareils domestique doivent être non toxiques.

Compatibilité avec les matériaux de construction Le réfrigérant doit être physiquement et chimiquement inerte vis-à-vis des matériaux de construction.

Nocivité pour l'environnement Bien que le cycle frigorifique à compression de vapeur soit fermé, des fuites de réfrigérant peuvent se produire, en particulier lors du démantèlement de l'installation. Il importe donc qu'il soit aussi peu nocif que possible pour l'environnement.

Coût Pour les grandes installations, le coét du réfrigérant est important.

En raison de ces diverses contraintes, une très grande variété de fluides sont utilisés comme réfrigérants. Les plus répandus sont certainement les hydrocarbures fluorés saturés connus sous le nom commercial de fréon, ou encore de chloro-fluoro-carbones (CFC).

On les désigne selon la nomenclature R-ijkBr, due à l'Institut International du Froid, avec

$$\begin{aligned} i &= \text{nombre d'atomes de carbone } - 1 \\ j &= \text{nombre d'atomes d'hydrogène } + 1 \\ k &= \text{nombre d'atomes de fluor} \\ r &= \text{nombre d'atomes de brome} \end{aligned}$$

Par conséquent, les réfrigérants à deux chiffres sont ceux comprenant un seul atome de carbone, p. ex. R-22 pour C H Cl F_2. La présence du fluor rend ces composés très stables, ininflammables et non toxiques. Ils sont compatibles avec les matériaux de construction, certaines huiles et les élastomères.

Leur très grande stabilité, en particulier des composés sans atome d'hydrogène, est également à l'origine de leur principal défaut principal défaut, car ils diffusent sans être décomposés jusqu'à la stratosphère, où ils sont décomposés par des réactions photochimiques, libérant du chlore qui réagit avec l'ozone stratosphérique. Cet inconvénient est entièrement évité avec les composés ne contenant pas de chlore, appelés HFC.

Des composés de masse moléculaire élevée, très fluorés, sont en cours d'étude et de développement pour les applications aux pompes à chaleur, mais aussi aux cycles moteurs, p. ex. le C_4F_8.

Les réfrigérants fluorés ont été très largement étudiées, et leurs propriétés thermodynamiques sont publiées par les producteurs et divers organismes scientifiques. Des tables informatisées sont notamment disponibles sur le TESTCenter.

Outre les fréons, le réfrigérant le plus employé est l'ammoniac, qui offre l'avantage d'une production frigorifique nette beaucoup plus élevée, et donc requiert des débits plus faibles pour une puissance frigorifique nette donnée. Il est également peu coéteux, ce qui explique qu'il est encore largement utilisé pour les installations de moyenne et de grande puissance, malgré sa toxicité et une certaine réactivité chimique (il corrode le cuivre).

10.4 Cycle frigorifique à absorption d'ammoniac

10.4.1 Introduction

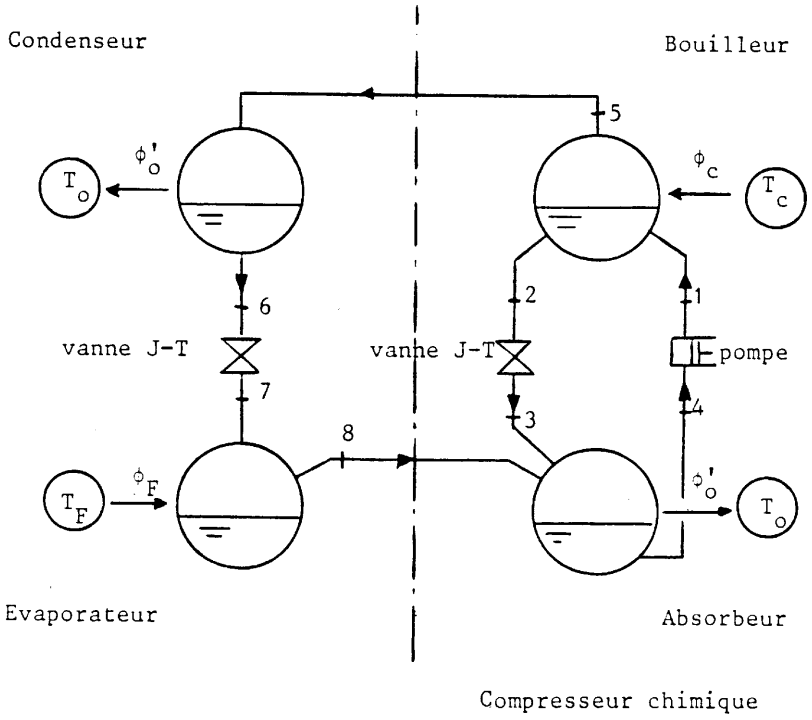
Si l'on dispose d'une source chaude en plus de la source gratuite à température ambiante, il est possible d'extraire de la chaleur d'une source froide sans apport de travail (machine frigorifique tritherme). Il existe deux principales manières de procéder :

1. les machines frigorifiques composées d'une machine thermique fonctionnant entre la source chaude et l'ambiance, qui entraîne une machine frigorifique à compression de vapeur ;
2. les machines à absorption de vapeur.

Ces dernières, qui offrent l'avantage de ne pas comprendre de machines tournantes (à l'exception d'une pompe), ont une longue histoire et sont les seules ayant atteint le développement industriel. Le principe va à présent en être expliqué, dans le cas particulier de la machine à absorption d'ammoniac.

D'une manière générale, les machines frigorifiques trithermes ont une efficacité thermique faible. Elles sont surtout utiles pour valoriser une source chaude à température modérée (rejets industriels, énergie solaire, biomasse) qui sans cela serait inutilisée, de sorte que l'efficacité a relativement peu d'importance.

10.4.2 Principe de fonctionnement



Une machine à absorption est composée de quatre réservoirs dans lesquels une phase liquide et une phase vapeur sont en équilibre, maintenus à des températures fixes par contact avec des sources de chaleur :

- le *bouilleur* à la température T_C de la source chaude et à haute pression ;
- le *condenseur* à la température $T_0 = T_M$ de la source gratuite et à haute pression ;
- l'*évaporateur* à la température T_F de la source froide et à basse pression ;
- l'*absorbeur* à la température $T_0 = T_M$ de la source gratuite et à basse pression.

FIG. 10.6 – Cycle frigorifique à absorption d'ammoniac

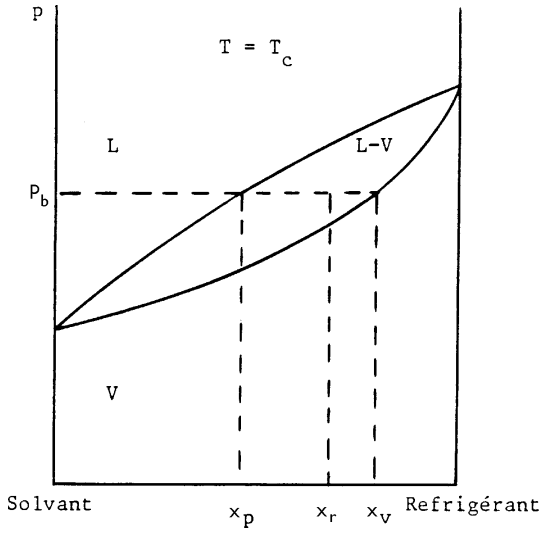
Une pompe sert à comprimer le liquide prélevé dans l'absorbeur, alors que le liquide prélevé dans le bouilleur et celui sortant du condenseur sont détendus à basse pression au moyen d'une vanne.

La machine comprend deux parties principales :

1. un compresseur chimique, formé de l'ensemble bouilleur-absorbeur, dont le but est de fournir en 5 un réfrigérant à haute pression, et d'aspirer ce même réfrigérant à basse température en 8.
2. un ensemble condenseur-vanne-évaporateur identique à celui des machines à compression.

Le compresseur chimique fonctionne en utilisant comme fluide actif un *mélange* comprenant un réfrigérant volatil (ammoniac) et un solvant peu volatil (eau).

A une température donnée (en l'occurrence T_C), l'équilibre des phases liquide/vapeur d'un tel mélange en fonction de son titre et de la pression se présente comme suit (voir Chimie générale/Chimie physique) :



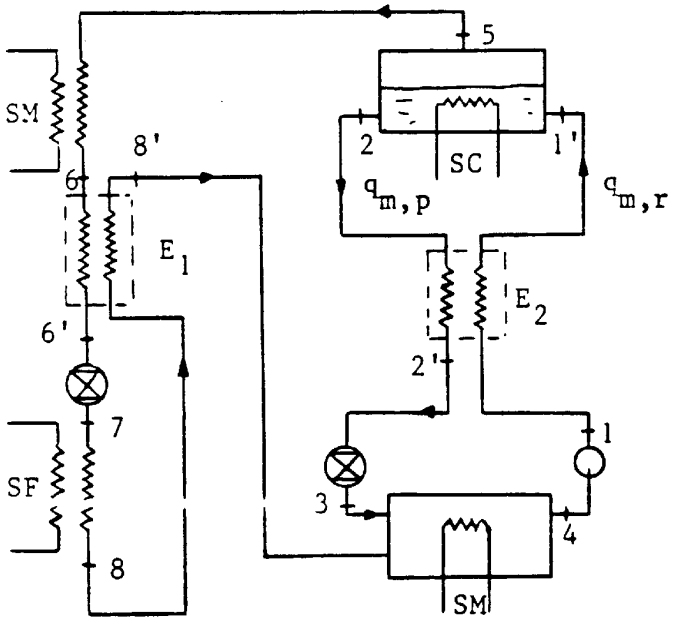
A une pression p_b, le mélange de titre massique en réfrigérant x_r se sépare en une phase vapeur plus riche (titre x_v) en réfrigérant volatil et un liquide plus pauvre (titre x_p) : c'est le principe de la distillation.
La vapeur riche en réfrigérant est condensée à température ambiante dans le condenseur, détendue dans la vanne et évaporée à basse température dans l'évaporateur.

FIG. 10.7 – Cycle frigorifique à absorption d'ammoniac 2

La vapeur riche à basse température sortant de l'évaporateur est ensuite absorbée par le liquide pauvre dans l'absorbeur pour reformer un mélange de titre x_r. La chaleur dégagée par ce processus exothermique est cédée à l'ambiance.

L'analyse détaillée du processus permettant de calculer l'efficacité frigorifique est assez complexe (J. Bougard, *Thermodynamique technique*) et ne sera pas traitée dans ce cours.

L'efficacité du cycle de base peut être améliorée en ajoutant des échangeurs de chaleur.



- la solution (pauvre) chaude prélevée du bouilleur sert à réchauffer la solution riche sortant de la pompe ;
- la vapeur froide sortant de l'évaporateur sert à refroidir le liquide sortant du condenseur.

FIG. 10.8 – dispositif cylindre/piston

10.5 Cycle frigorifique à air

Le cycle frigorifique à air est simplement un cycle de Joule inversé.

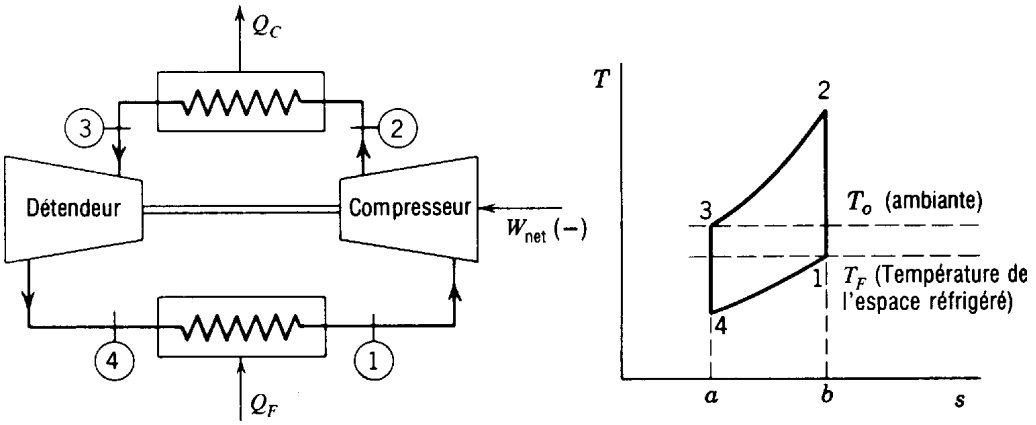


FIG. 10.9 – Cycle frigorifique à air

Contrairement au cycle à compression de vapeur, la puissance récupérable lors de la détente n'est pas négligeable, et l'on utilise donc une turbine (alors que la détente était effectuée par une vanne dans le cycle à compression de vapeur).

La production frigorifique nette PFN $= h_1 - h_4 = c_p(T_1 - T_4)$, alors que le travail massique requis vaut $w = (h_2 - h_1) - (h_3 - h_4) = c_p[(T_2 - T_1) - (T_3 - T_4)]$. Par conséquent, l'efficacité frigorifique (COP) vaut

$$\varepsilon_{\text{fr}} = \frac{T_1 - T_4}{(T_2 - T_1) - (T_3 - T_4)} = \frac{1}{\frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} - 1} = \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} = \frac{1}{\Pi^{\frac{k-1}{k}} - 1} < \frac{1}{\frac{T_C}{T_F} - 1}$$

La production frigorifique volumétrique vaut, elle

$$\text{PFV} = \frac{c_p(T_1 - T_4)}{v_1} = \frac{c_p(T_1 - T_4)}{\frac{RT_1}{p_1}} = \frac{c_p p_1}{R}(1 - \frac{T_4}{T_1}) = \frac{c_p p_1}{R}(1 - \frac{T_3}{T_1}\Pi^{\frac{1-k}{k}})$$

On a représenté les courbes de COP et de PFV en fonction du rapport de pression pour $T_F = 263$ K et $T_C = 293$ K sur la planche suivante. Remarquons que ces machines requièrent un rapport de pression minimum qui croît rapidement avec le rapport T_C/T_F. En effet,

$$\frac{T_2}{T_1} = \Pi^{\frac{k-1}{k}} > \frac{T_3}{T_1} = \frac{T_C}{T_F} \qquad \rightarrow \qquad \Pi > \left(\frac{T_C}{T_F}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

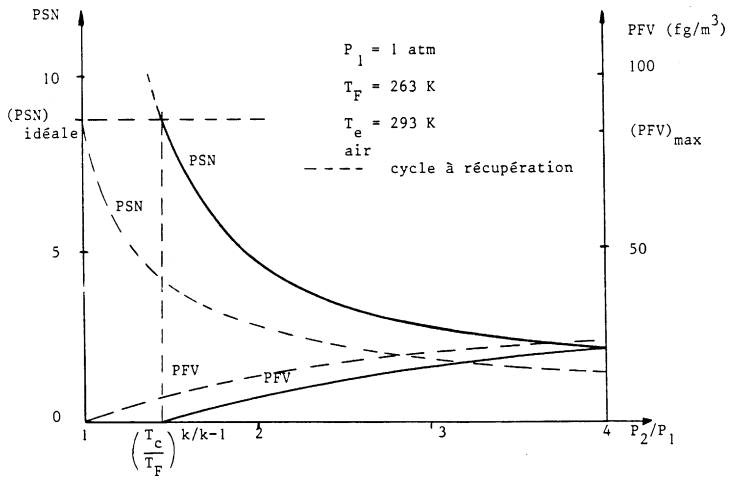


FIG. 10.10 – Courbes de COP

Pour des rapports de pression modérés, le COP diminue rapidement, et, en tenant compte du rendement des machines, il est encore réduit (environ d'un facteur 3). Ces machines frigorifiques ne sont donc pas compétitives avec les machines à compression de vapeur. Cependant, leur faible poids (dé à l'utilisation de turbomachines) est un avantage décisif pour le conditionnement d'air des avions.

On peut améliorer l'installation en utilisant un cycle de Joule inverse à récupération.

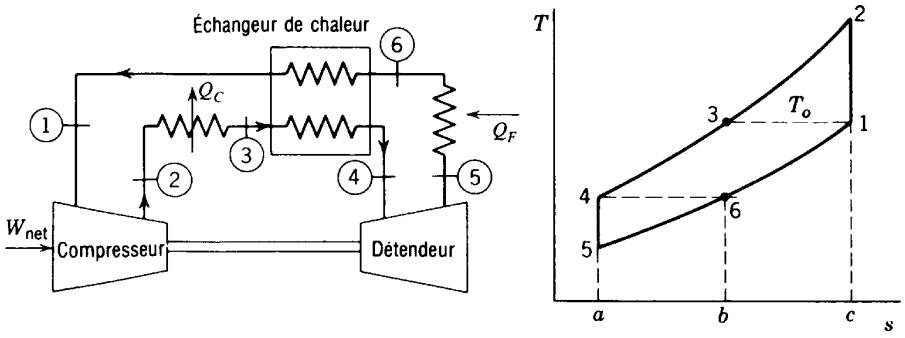


FIG. 10.11 – un cycle de Joule inverse à récupération

On peut ainsi atteindre aisément des températures très basses en un seul étage, ce qui rend la machine très compétitive. Ces machines sont très largement utilisées dans les installations à très basse température, notamment les liquéfacteurs. Le gaz utilisé n'est alors plus nécessairement de l'air.

Il se pose toutefois des problèmes technologiques (matériaux, lubrification) en raison des basses températures auxquelles la turbine fonctionne.

Les performances du cycle à récupération sont

$$\begin{aligned}
\text{PFN} &= c_p(T_6 - T_5) = c_p(T_F - T_5) \\
w &= c_p[(T_2 - T_1) - (T_4 - T_5)] \\
\varepsilon_{\text{fr}} &= \frac{T_F - T_5}{(T_2 - T_1) - (T_4 - T_5)} = \frac{1}{\frac{T_2 - T_1}{T_F - T_5} - 1} = \frac{1}{\frac{T_2}{T_F} - 1} \\
&= \frac{1}{\frac{T_C}{T_F}\Pi^{\frac{k-1}{k}} - 1} \\
\text{PFV} &= \frac{c_p(T_6 - T_5)}{\frac{RT_1}{p_1}} = \frac{c_p p_1}{R}\frac{T_F - T_6}{T_C} = \frac{c_p p_1}{R}\frac{T_F}{T_C}(1 - \Pi^{\frac{1-k}{k}})
\end{aligned}$$

Chapitre 11

Relations thermodynamiques

Parmi les variables thermodynamiques, seul un petit nombre peut faire l'objet de mesures directes : p, v, T. On peut déduire les valeurs des variables non mesurables à partir des données expérimentales grâce à des relations thermodynamiques, dont nous allons à présent établir les principales.

11.1 L'équation de Clapeyron

L'équation de Clapeyron décrit la variation des conditions d'équilibre entre deux phases. A la section 7.4.2, on a établi la relation suivante entre les propriétés d'une liquide et d'une vapeur en équilibre :

$$h_g - h_l = T(s_g - s_l)$$

Par conséquent, le long de la courbe de saturation,

$$\mathrm{d}(h_g - h_l) = T\mathrm{d}(s_g - s_l) + (s_g - s_l)\mathrm{d}T$$

Mais par ailleurs, $\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p$, et donc

$$\mathrm{d}(h_g - h_l) = T\mathrm{d}(s_g - s_l) + (v_g - v_l)\mathrm{d}p$$

En combinant avec la relation précédente, on obtient

$$(s_g - s_l)\mathrm{d}T = (v_g - v_l)\mathrm{d}p \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{sat}} = \frac{s_g - s_l}{v_g - v_l} = \frac{h_g - h_l}{T(v_g - v_l)} \tag{11.1}$$

Cette relation permet de déterminer la chaleur latente de vaporisation $L = h_g - h_l$ à partir des mesures de la courbe de vaporisation $p_{\mathrm{sat}}(T)$ et des volumes massique de liquide et de vapeur saturés.

Pour les températures (et donc les pressions) pas trop proches des conditions critiques, $v_l \ll v_g$ et l'on peut faire l'approximation de gaz parfait pour la phase vapeur $v_g = RT/p$, de sorte que l'on obtient la forme simplifiée

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{sat}} = \frac{L}{RT^2}p \tag{11.2}$$

Comme de plus, dans ces conditions, la chaleur latente est pratiquement indépendante de la température, on peut intégrer cette dernière équation pour obtenir finalement

$$\ln p_{\text{sat}} = A - \frac{L}{RT} \qquad \rightarrow \qquad p_{\text{sat}}(T) = Ce^{-\frac{L}{RT}}$$

L'équation de Calpeyron (11.1) s'applique également mutatis mutandis aux autres équilibres de phase, en particulier pour l'équilibre solide-liquide. Comme dans ce cas $v_l - v_s$ est généralement très faible, il s'ensuit que la pente de la courbe de fusion est très élevée. Dans le cas de l'eau, qui se dilate en se solidifiant, $v_l - v_s < 0$ et par conséquent, la pente de la courbe de fusion est négative, ce qui est cohérent avec la discussion sur les propriétés thermodynamiques des substances pures à la section 3.6.

11.2 Rappels mathématiques

Comme on l'a déjà mentionné à de nombreuses reprises, l'état d'une substance pure est entièrement déterminé par la connaissance de deux variables thermodynamiques, mais le choix des variables thermodynamiques indépendantes est arbitraire. Toutefois, la théorie des fonctions de plusieurs variables permet d'établir des relations entre les dérivées des variables thermodynamiques dans plusieurs systèmes de variables indépendantes.

Considérons trois variables thermodynamiques quelconques x, y, z. En choisissant x et y comme variables indépendantes, la différentielle de la variable z s'écrit

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y$$

où la dernière notation est habituellement utilisée en thermodynamique pour rendre clair le choix du couple de variables indépendantes.

On peut encore réécrire la relation précédente

$$\mathrm{d}z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$$

où

$$M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \qquad \text{et} \qquad N = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

Pour une fonction $z(x, y)$ suffisamment dérivable, les dérivées secondes croisées sont égales et par conséquent

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y \tag{11.3}$$

Par ailleurs, en choisissant y et z comme couple de variables indépendantes, on a

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \mathrm{d}z$$

et d'autre part en choisissant x et z comme variables indépendantes

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \mathrm{d}z$$

Insérant cette dernière expression dans la précédente, on obtient

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \mathrm{d}x + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] \mathrm{d}z$$

ou encore

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z - 1\right] \mathrm{d}x + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] \mathrm{d}z = 0$$

Comme $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}z$ sont arbitraires, il s'ensuit que les deux termes entre crochets sont nuls.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z - 1 = 0 \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 0$$

Multipliant la deuxième relation par $(\partial z/\partial x)_y$, et compte tenu de ce que, par la première,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$$

on obtient la forme alternative

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x + 1 = 0 \tag{11.4}$$

11.3 Les relations de Maxwell

Les relations de Maxwell sont des identités mathématiques corollaires des équations de Gibbs (7.8)

$$\mathrm{d}u = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v \tag{11.5}$$

$$\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p \tag{11.6}$$

En définissant *l'énergie libre d'Helmoltz*

$$a = u - Ts \tag{11.7}$$

et *l'énergie libre de Gibbs*

$$g = h - Ts \tag{11.8}$$

on déduit deux équations de Gibbs supplémentaires

$$\mathrm{d}a = -s\mathrm{d}T - p\mathrm{d}v \tag{11.9}$$

$$\mathrm{d}g = -s\mathrm{d}T + v\mathrm{d}p \tag{11.10}$$

Ces équations sont de la forme $\mathrm{d}z = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$. On peut donc appliquer l'identité mathématique générale (11.3), qui fournit les résultats

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v \tag{11.11}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p \tag{11.12}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \tag{11.13}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{11.14}$$

Par ailleurs, par la définition même des dérivées partielles et l'expression des équations de Gibbs,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v = T, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_s = -p \tag{11.15}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T, \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s = v \tag{11.16}$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_v = -s, \qquad \left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)_T = -p \tag{11.17}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p = -s, \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T = v \tag{11.18}$$

Toutes ces relations sont mises à profit pour calculer les variables thermodynamiques non directement mesurables à partir des données expérimentales. Ainsi, par exemple, les équations (11.13–11.14) permettent de calculer les variations d'entropie le long d'une isotherme à partir des mesures de p, v et T.

11.4 Relations thermodynamiques additionnelles

11.4.1 Energie interne et entropie dans le système $T - v$

On a défini la chaleur massique isochore c_v comme

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v$$

Mais par ailleurs,

$$\mathrm{d}u = T\mathrm{d}s - p\mathrm{d}v$$

Par conséquent, en développant la différentielle de l'entropie dans le système $T - v$,

$$\mathrm{d}u = T\left[\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \mathrm{d}v\right] - p\mathrm{d}v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p\right]\mathrm{d}v$$

Comme par ailleurs

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \mathrm{d}v = c_v\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T \mathrm{d}v$$

on en déduit par identification, et par application de la relation de Maxwell (11.13),

$$c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \tag{11.19}$$

de sorte qu'on a finalement

$$\mathrm{d}u = c_v\mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p\right]\mathrm{d}v \tag{11.20}$$

On déduit de cette expression que, si l'on connaît la chaleur massique à volume constant sur une isochore et une équation d'état pour p en fonction de T et v, alors il suffit d'intégrer (11.20)

pour déterminer u en fonction de T et v dans toute la région de phase uniforme décrite par l'équation d'état.

Par ailleurs, on a

$$\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \mathrm{d}v = \frac{c_v}{T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \mathrm{d}v \tag{11.21}$$

qui permet de déterminer s en fonction de T et v dans la même région.

11.4.2 Enthalpie et entropie dans le système $T - p$

On répète à présent l'analyse de la section précédente dans le système $T - p$. Avec

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$$

et l'équation différentielle de l'enthalpie

$$\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p$$

on développe dans cette dernière expression la différentielle de l'entropie dans le système $T-p$,

$$\mathrm{d}h = T\left[\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p\right] + v\mathrm{d}p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T + v\right]\mathrm{d}p$$

Comme par ailleurs

$$\mathrm{d}h = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p = c_p\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}v$$

on en déduit par identification, et par application de la relation de Maxwell (11.14),

$$c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T + v = v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{11.22}$$

de sorte qu'on a finalement

$$\mathrm{d}h = c_p\mathrm{d}T + \left[v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\mathrm{d}p \tag{11.23}$$

expression qui permet de déterminer h en fonction de T et p dans toute région de phase uniforme, pour peu qu'on connaisse la chaleur massique à pression constante sur une isobare et une équation d'état pour v en fonction de p et T.

Par ailleurs, on a également l'équation de l'entropie

$$\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p = \frac{c_p}{T}\mathrm{d}T - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p \tag{11.24}$$

11.4.3 Relations concernant les chaleurs massiques

A partir des deux équations différentielles de l'entropie (11.21–11.24), on tire directement, par application de l'identité (11.3)

$$\left(\frac{\partial(c_v/T)}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v \tag{11.25}$$

et

$$\left(\frac{\partial(c_p/T)}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p \tag{11.26}$$

Par ailleurs, en égalant les deux équations différentielles de l'entropie

$$\frac{c_p}{T}\mathrm{d}T - \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p = \frac{c_v}{T}\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \mathrm{d}v$$

on tire

$$\mathrm{d}p = \frac{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}\left[\frac{c_p - c_v}{T}\mathrm{d}T - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \mathrm{d}v\right]$$

d'où on déduit par identification

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{c_p - c_v}{T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}$$

Résolvant cette dernière expression pour $c_p - c_v$ et utilisant l'identité (11.4), on obtient finalement

$$c_p - c_v = T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = -T\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2 \tag{11.27}$$

Observations

1. $c_p - c_v > 0$, puisque $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T < 0$ pour toutes les substances connues ;
2. comme $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ (qui est lié au coefficient de dilatation volumique, voir section suivante) est habituellement faible pour les liquides et les solides, $c_p - c_v$ est corollairement très faible, comme on l'a déjà souligné ;
3. enfin, $c_p - c_v \to 0$ lorsque $T \to 0$.

11.5 Coefficients de dilatation volumique et de compressibilité isotherme et adiabatique

De même qu'on définit le coefficient de dilatation linéique pour les solides

$$\delta_T = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p$$

on peut définir un coefficient de dilatation volumique, applicable tant aux gaz et aux liquides qu'aux solides, par l'expression suivante

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \tag{11.28}$$

Le coefficient de compressibilité isotherme, β_T représente quant à lui la variation de volume dé à une variation de pression à température constante

$$\beta_T \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \tag{11.29}$$

Son inverse est appelé coefficient d'élasticité isotherme B_T

$$B_T \equiv -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \tag{11.30}$$

On définit enfin le coefficient de compressibilité adiabatique β_s qui représente la variation de volume dé à une variation de pression pour une transformation isentropique

$$\beta_s \equiv -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s \tag{11.31}$$

et son inverse, le coefficient d'élasticité adiabatique B_s

$$B_s = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s \tag{11.32}$$

Les coefficients de dilatation volumique et de compressibilité sont des variables thermodynamiques et, partant, ils sont fonction de deux variables indépendantes. On les trouve dans les compendiums de propriétés physiques courants.

Chapitre 12

Mélanges de gaz

On s'est principalement limité jusqu'à présent à l'étude des substances pures. Or, bon nombre de problèmes thermodynamiques font intervenir des mélanges de substances pures.

On s'intéressera dans ce chapitre aux propriétés thermodynamiques des mélanges de gaz, et plus particulièrement des mélanges de gaz parfaits. Ceci nous conduira à considérer un modèle simplifié pour des mélanges de gaz dont un est condensable comme le mélange d'air et de vapeur d'eau.

12.1 Généralités et mélanges de gaz parfaits

Soit un mélange de n_s constituants, chacun étant une substance pure. La masse et le nombre de moles totaux sont respectivement

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_{n_s} = \sum m_i$$
$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_{n_s} = \sum n_i$$

On caractérise ce mélange par le titre ou fraction molaire

$$y_i = \frac{n_i}{n} \tag{12.1}$$

ou par le titre ou fraction massique

$$z_i = \frac{m_i}{m} \tag{12.2}$$

Ces deux grandeurs sont évidemment liées. En effet, puisque $m_i = n_i M_i$ où M_i est la masse molaire du constituant i,

$$z_i = \frac{n_i M_i}{\sum n_j M_j} = \frac{y_i M_i}{\sum y_j M_j} \tag{12.3}$$

Inversément,

$$y_i = \frac{n_i}{n} = \frac{m_i/M_i}{\sum m_j/M_j} = \frac{z_i/M_i}{\sum z_j/M_j} \tag{12.4}$$

La masse molaire du mélange vaut, elle

$$M = \frac{m}{n} = \sum y_i M_i = \frac{1}{\sum z_i/M_i} \tag{12.5}$$

On considère plusieurs quantités de gaz de nature différente *à la même pression et à la même température*. On les met en contact, et on les laisse diffuser jusqu'à ce qu'ils forment un mélange homogène. Ce faisant, on constate que les deux lois suivantes sont vérifiées.

12.1.1 Première loi des mélanges

Le mélange de gaz s'effectue sans variation de volume si la pression et la température ne varient pas.

En pratique, le volume total étant constant au cours de la transformation, on constate que ni pression ni température ne varient au cours du mélange.

Par conséquent, V_i étant le volume occupé initialement par le constituant i, et V étant le volume total

$$V = \sum V_i \tag{12.6}$$

Il en résulte qu'un mélange de gaz parfaits obéit à la loi de Boyle-Mariotte. En effet,

$$pV = \sum pV_i = \sum n_i \bar{R}T = \sum m_i R_i T = f(T)$$

12.1.2 Deuxième loi des mélanges

L'énergie interne d'un mélange de gaz parfaits est égale à la somme des énergies internes de chacun des constituants à la même température.

En pratique, on constate que le mélange s'effectue dans échange de chaleur (par une expérience analogue à celle de Joule p. ex.), et donc sans variation d'énergie interne (puisqu'il n'y a pas de travail reçu non plus).

$$U = \sum U_i = \sum n_i \bar{u}_i = \sum m_i u_i \tag{12.7}$$

On en déduit que, puisque l'énergie interne de chaque constituant ne dépend que de la température, il en va de même de l'énergie interne du mélange.

Puisque le mélange de gaz parfaits obéit aux lois de Joule et de Boyle-Mariotte, il constitue également un gaz parfait : il obéit à la loi des gaz $pV = n\bar{R}T$, et ses propriétés sont calculables pour autant que l'on connaisse l'une des chaleurs massiques.

12.1.3 Enthalpie d'un mélange

Comme $H = U + pV$, il résulte des deux lois de mélanges que

$$H = \sum H_i = \sum n_i \bar{h}_i = \sum m_i h_i \tag{12.8}$$

12.1.4 La pression partielle d'un constituant

Considérons un mélange de gaz parfaits de composition connue à une pression p et une température T données et occupant un volume V donné. Si chaque constituant était seul à occuper le volume, sa pression vaudrait

$$p_i V = n_i \bar{R}T = pV_i \tag{12.9}$$

où V_i serait le volume occupé par le constituant i à la pression p et la température T. Par conséquent, en vertu de la première loi des mélanges

$$\sum p_i V = p \sum V_i \qquad \rightarrow \qquad \sum p_i = p \tag{12.10}$$

résultat connu sous le nom de *loi de Dalton*. On donne dès lors à la grandeur p_i le nom de *pression partielle* du constituant i.

Il en résulte que

$$\frac{p_i}{p} = \frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} = y_i \tag{12.11}$$

12.1.5 Chaleurs massiques d'un mélange

En divisant les équations (12.7–12.8) par la masse globale du mélange, on obtient les variantes massiques

$$u = \sum z_i u_i \qquad\qquad h = \sum z_i h_i$$

d'où, en dérivant par rapport à la température

$$c_v = \sum z_i c_{v,i} \qquad\qquad c_p = \sum z_i c_{p,i} \tag{12.12}$$

12.1.6 Entropie d'un mélange

L'entropie d'un gaz parfait est fonction non seulement de la température, mais aussi de la pression. Comme chaque constituant est à sa pression partielle,

$$S = \sum n_i \bar{s}_i(T, p_i) \tag{12.13}$$

On peut tirer de cette relation la variation d'entropie au cours de l'opération de mélange considérée en début de section. Chaque constituant étant initialement à pression p et après mélange à sa pression partielle p_i,

$$S_b - S_a = \sum n_i(\bar{s}_i(T, p_i) - \bar{s}_i(T, p)) = -\bar{R} \sum n_i \ln\left(\frac{p_i}{p}\right) = -\bar{R} \sum n_i \ln y_i \tag{12.14}$$

Une conclusion intéressante est que la variation d'entropie ne dépend que du nombre de môles de chaque constituant, et non de leur nature. Ainsi, l'augmentation d'entropie due au mélange d'une mole d'azote avec une mole d'oxygène est identique à celle due au mélange d'une mole d'azote avec une mole d'hydrogène. Mais d'autre part, il est clair qu'il n'y a pas de variation d'entropie si l'on mélange une mole d'azote avec une autre mole d'azote ! La variation d'entropie dépend donc de notre capacité à distinguer les gaz mélangés.

12.2 Modèle simplifié d'un mélange d'un gaz et d'une vapeur condensable

12.2.1 Généralités

On considère à présent le cas d'un mélange d'un gaz avec une vapeur condensable. L'exemple le plus familier est le mélange d'air et de vapeur d'eau que l'on rencontre dans les problèmes de conditionnement d'air et de séchage. Dans certaines circonstances, la vapeur se condense partiellement, et est donc en équilibre avec une phase liquide (ou solide).

Ce genre de problèmes s'analyse aisément en faisant les hypothèses suivantes :

1. la phase liquide ou solide ne contient aucun gaz dissous ;
2. la phase gazeuse peut être considérée comme un mélange de gaz parfaits ;
3. l'équilibre entre la phase liquide et le mélange à une pression et une température données n'est pas influencé par la présence de l'autre constituant. Il s'ensuit qu'à l'équilibre, la pression partielle de vapeur est égale à la pression de saturation à la température du mélange.

Considérons tout d'abord un mélange gaz-vapeur à une température T supérieure à la température de saturation correspondant à la pression partielle de la vapeur, de sorte que la vapeur est surchauffée. Corollairement, la pression partielle est inférieure à la pression de saturation à la température donnée.

Si l'on refroidit le mélange à pression constante, alors la vapeur va se condenser lorsque la température atteint la température de saturation correspondant à la pression partielle de la vapeur. On appelle cette température la *température de rosée* du mélange. La situation est illustrée dans le diagramme $T - s$ *de la vapeur* ci-dessous.

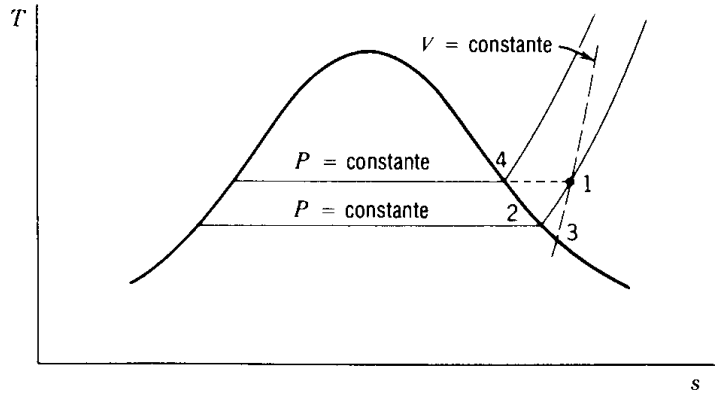


FIG. 12.1 – le diagramme $T - s$ *de la vapeur*

12.2.2 L'humidité relative

Si la pression partielle de vapeur est précisément égale à la pression de saturation à la température considérée, le mélange est appelé *mélange saturé* (« air saturé »pour le mélange air-vapeur d'eau).

On définit l'*humidité relative* comme le rapport entre la fraction molaire de la vapeur à celle d'un mélange saturé à la même température et à la même pression globale. Comme la fraction molaire est égale au rapport pression partielle/pression globale, on a donc

$$\phi = \frac{p_v}{p_{\text{sat}}} \tag{12.15}$$

Par exemple, dans le cas représenté dans le diagramme précédent,

$$\phi_1 = \frac{p_1}{p_4}$$

12.2.3 L'humidité absolue

L'humidité absolue ω d'un mélange air-vapeur d'eau est le rapport de la masse de vapeur d'eau à la masse d'air

$$\omega = \frac{m_v}{m_a} \tag{12.16}$$

La définition s'appique également à tout autre mélange gaz-vapeur, et l'indice a désigne le gaz non condensable. L'humidité absolue est directement liée au titre massique en vapeur. Comme $z = m_v/m$, et $m = m_a + m_v$,

$$\omega = \frac{z_v}{z_a} = \frac{z_v}{1 - z_v} \qquad \rightarrow \qquad z_v = \frac{\omega}{1 + \omega}$$

Etablissons à présent la relation entre humidités absolue et relative.

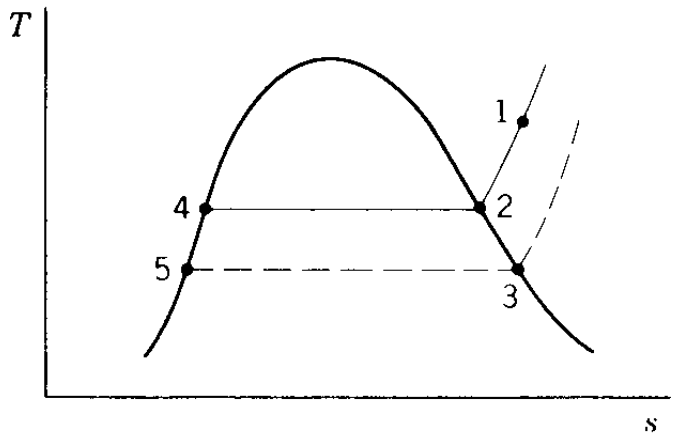
$$\omega = \frac{m_v}{m_a} = \frac{p_v}{p_a}\frac{R_a}{R_v} = \frac{p_v}{p - p_v}\frac{M_v}{M_a} = \frac{M_v}{M_a}\frac{\phi p_{\text{sat}}}{p - \phi p_{\text{sat}}} \tag{12.17}$$

et dans le cas de l'air humide, $M_v/M_a = 0,622$. En inversant cette relation, on obtient

$$\phi = \frac{\frac{M_a}{M_v}\omega}{1 + \frac{M_a}{M_v}\omega}\frac{p}{p_{\text{sat}}} \tag{12.18}$$

12.2.4 Remarques complémentaires

Considérons à nouveau le refroidissement isobare d'un mélange gaz-vapeur.



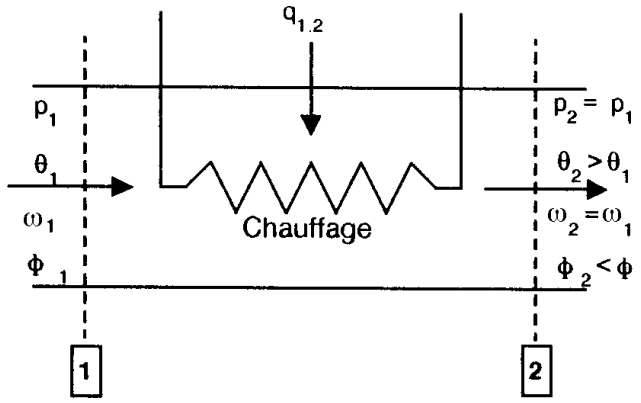
Au-dessus de la température de rosée, la pression partielle de vapeur reste constante. Lorsque la température atteint la température de rosée, la vapeur atteint l'état de saturation 2, et il apparaît un condensat liquide saturé en équilibre avec la vapeur (état 4). Si on continue à abaisser la température, alors la pression partielle de vapeur diminue et les phases liquide et vapeur se déplacent sur la cloche de saturation.

FIG. 12.2 – drefroidissement isobare d'un mélange gaz-vapeur

12.3 Transformations de l'air humide

On considère des transformations dans des systèmes ouverts stationnaires faisant intervenir un mélange gaz-vapeur tel que l'air humide. Pour analyser ce type de dispositifs, on utilise la loi de conservation de la masse (pour chaque constituant) et le premier principe.

12.3.1 Chauffage isobare



Comme il s'agit d'un chauffage, la vapeur ne peut se condenser, et par conséquent $\omega_2 = \omega_1$. Le premier principe, s'écrit

$$(\dot{m}_a h_{a2} + \dot{m}_v h_{v2}) - (\dot{m}_a h_{a1} + \dot{m}_v h_{v1}) = \dot{Q}$$

En divisant par le débit d'air $\dot{m}_a$, on obtient

FIG. 12.3 – Transformations de l'air humide : Chauffage isobare

$$(h_{a2} + \omega_2 h_{v2}) - (h_{a1} + \omega_1 h_{v1}) = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_a}$$

La grandeur $h_a + \omega h_v$ est l'enthalpie du mélange *par kg d'air sec*. Pour faciliter l'écriture, on la désigne par le symbole h^a. Semblablement, on désigne par le symbole q^a la quantité de chaleur reçue par kg d'air sec. L'expression précédente devient alors

$$h_2^a - h_1^a = q^a$$

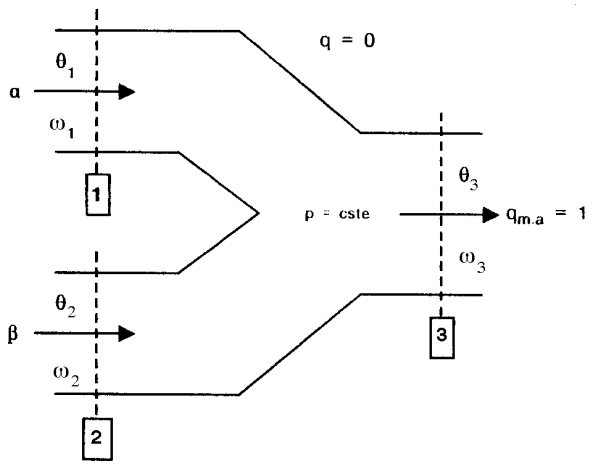
L'air et la vapeur étant supposées se comporter comme des gaz parfaits,

$$q^a = (c_{p,a} + \omega c_{p,v})(T_2 - T_1)$$

Remarquons enfin que, puisque la pression de saturation augmente, l'humidité relative diminue.

$$\phi_2 = \frac{p_v}{p_{\text{sat},2}} < \phi_1 = \frac{p_v}{p_{\text{sat},1}}$$

12.3.2 Mélange adiabatique



Considérons le mélange adiabatique de deux flux d'air humide. La conservation de la masse d'air et de vapeur s'écrivent

$$\dot{m}_{a1} + \dot{m}_{a2} = \dot{m}_{a3}$$
$$\dot{m}_{a1}\omega_1 + \dot{m}_{a2}\omega_2 = \dot{m}_{a3}\omega_3$$

et l'on obtient l'humidité absolue du mélange de sortie ω_3 à partir de la deuxième équation.

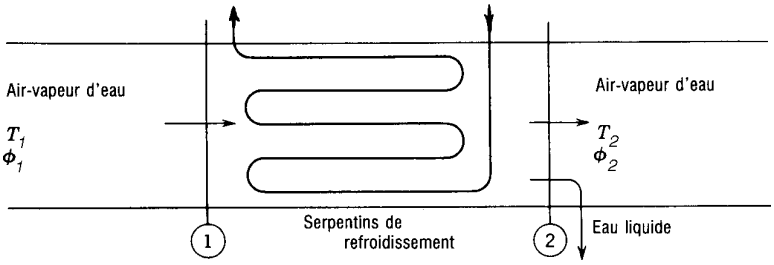
FIG. 12.4 – Transformations de l'air humide : Mélange adiabatique

D'autre part, vu que le mélange est adiabatique, le premier principe s'écrit

$$\dot{m}_{a1}h_1^a + \dot{m}_{a2}h_2^a = \dot{m}_{a3}h_3^a$$

relation qui permet de déterminer la température de sortie T_3.

12.3.3 Assèchement par refroidissement



On suppose que la température de sortie est inférieure à la température de rosée du mélange d'entrée. Dans ces conditions, une partie de la vapeur se condense.

FIG. 12.5 – Transformations de l'air humide : Assèchement par refroidissement

On suppose que le liquide condensé est en équilibre avec la vapeur dans l'état de sortie. Les équations de conservation de la masse sont dès lors

$$\dot{m}_{a1} = \dot{m}_{a2} = \dot{m}_a$$
$$\dot{m}_{a1}\omega_1 = \dot{m}_{a2}\omega_2 + \dot{m}_{l2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\dot{m}_{l2}}{\dot{m}_a} = \omega_1 - \omega_2$$

Appliquons à présent le premier principe

$$\dot{m}_a h_2^a + \dot{m}_{l2}h_{l2} - \dot{m}_a h_1^a = \dot{Q} = -\dot{Q}^*$$

En divisant par le débit massique d'air sec, on obtient l'expression de la quantité de chaleur à extraire par kg d'air sec

$$q^{a*} = h_1^a - h_2^a - (\omega_1 - \omega_2)h_{l2}$$

que l'on peut encore développer comme suit

$$\begin{aligned} q^{a*} &= h_{a1} - h_{a2} + \omega_1 h_{v1} - \omega_2 h_{v2} - (\omega_1 - \omega_2) h_{l2} \\ &= h_{a1} - h_{a2} + \omega_2 (h_{v1} - h_{v2}) + (\omega_1 - \omega_2)(h_{v1} - h_{l2}) \\ &= h_{a1} - h_{a2} + \omega_2 (h_{v1} - h_{v2}) + (\omega_1 - \omega_2)(h_{v1} - h_{v2} + \underbrace{h_{v2} - h_{l2}}_{=L}) \end{aligned}$$

et sous cette forme, la quantité de chaleur extraite apparaît comme la somme de
- la partie correspondant au refroidissement de l'air sec, $h_{a1} - h_{a2}$,
- la partie correspondant au refroidissement de la vapeur résiduelle, $\omega_2(h_{v1} - h_{v2})$, et
- la partie correspondant au refroidissement suivi de la condensation de la vapeur qui se condense.

12.3.4 Saturation adiabatique

La saturation adiabatique est un processus par lequel un mélange air-vapeur d'eau est mis en contact avec une masse d'eau dans une canalisation bien isolée.

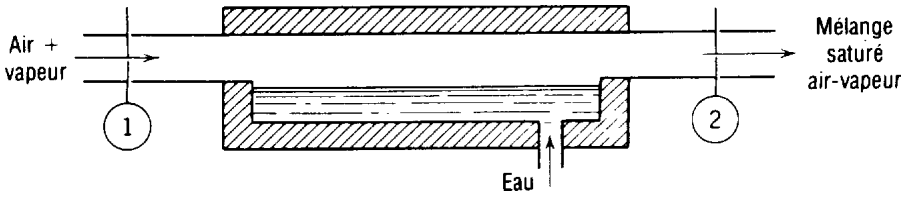


FIG. 12.6 – Transformations de l'air humide : Saturation adiabatique

Si le mélange entrant n'est pas saturé, de l'eau s'évapore et la température du mélange diminue. La température de sortie lorsque le mélange de sortie est saturé est appelée température de saturation adiabatique.

Les équations de conservation de la masse sont semblables à celles de la section précédente, de sorte que

$$\frac{\dot{m}_l}{\dot{m}_a} = \omega_2 - \omega_1$$

Si l'on suppose que le liquide évaporé est à température T_2 (en équilibre thermique avec le mélange de sortie), le premier principe donne

$$\dot{m}_a h_2^a - \dot{m}_l h_{l2} - \dot{m}_a h_1^a = 0$$

ou encore, en divisant par le débit d'air sec

$$h_2^a = h_1^a + (\omega_2 - \omega_1) h_{l2}$$

expression que l'on peut développer comme suit

$$\begin{aligned} h_{a1} - h_{a2} &= \omega_2 h_{v2} - \omega_1 h_{v1} - (\omega_2 - \omega_1) h_{l2} \\ &= \omega_2 L - \omega_1 (h_{v1} - h_{l2}) = -\omega_1 (h_{v1} - h_{v2}) + (\omega_2 - \omega_1) L \end{aligned} \qquad (12.19)$$

Une conclusion intéressante de cette relation est que la température de saturation adiabatique ne dépend que de la température et de l'humidité du mélange d'entrée (et bien sér de la pression) puisque, le mélange de sortie étant saturé, ω_2 est fonction de la température T_2. Par conséquent, l'humidité du mélange d'entrée peut être déterminée en mesurant la température d'entrée et de sortie.

12.4 Le psychromètre

Comme on l'a vu à la section précédente, le phénomène d'évaporation de l'eau au contact d'un air humide non saturé peut être mis à profit pour déterminer l'humidité de cet air. On effectue habituellement ce type de mesure à l'aide d'un *psychromètre* tel que représenté dans le schéma suivant, constitué d'un thermomètre sec et d'un thermomètre humide placés au sein d'un écoulement d'air.

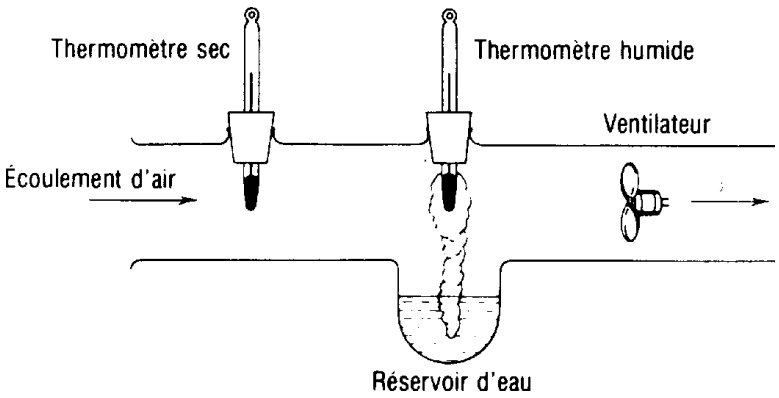


FIG. 12.7 – Le psychromètre

Le mélange n'étant pas saturé, une partie de l'eau de la mèche s'évapore, ce qui entraîne une chute de la température de l'eau de la mèche. Il en résulte un transfert de chaleur de l'air et du thermomètre vers la mèche jusqu'à ce qu'un état d'équilibre déterminé par les taux d'évaporation et de transfert de chaleur soit atteint.

Comme le taux d'évaporation dépend de l'humidité du mélange initial, il s'ensuit que la température d'équilibre est d'autant plus faible que l'humidité du mélange initial est faible, et donc la différence de température entre les deux thermomètres constitue une mesure de cette humidité.

Les phénomènes intervenant dans le psychromètre sont clairement différents de ceux intervenant dans le processus de saturation adiabatique décrit à la section précédente. Toutefois, au voisinage des conditions de pression et de température atmosphériques, on constate que les températures de thermomètre humide et de saturation adiabatique sont quasiment égales.

En première approximation, on peut donc calculer l'humidité en supposant que la température de thermomètre humide est la température adiabatique de saturation. Pour plus de précision, il faut recourir au diagramme d'étalonnage du psychromètre.

12.5 Le diagramme psychrométrique

Bien que les transformations de l'air humide puissent se calculer analytiquement comme on l'a vu dans les exemples précédents, on préfère souvent en pratique utiliser un *diagramme psychrométrique.*

Le diagramme psychrométrique classique représente un ensemble de propriétés thermodynamique de l'air humide *à une pression donnée* en fonction de la température de thermomètre sec en abscisse et de l'humidité absolue en ordonnée. On y trouve (voir exemple ci-après)

– des courbes iso-humidité relative, calculées à partir de la relation (12.17)

$$\omega = \frac{M_v}{M_a} \frac{\phi p_{\text{sat}}}{p - \phi p_{\text{sat}}}$$

– des isothermes humides, assimilées à des iso-température de saturation adiabatique, dont l'équation est donnée par (12.19)

$$\omega(h_v(T) - h_l(T_s)) = \omega(p, p_{\text{sat}}(T_s))L(T_s) - (h_a(T) - h_a(T_s))$$

Comme $h_v(T) - h_l(T_s) \approx L(T_s) \approx h_v(T_s)$, ces courbes sont pratiquement des droites.

– des iso-enthalpie par kg d'air sec. Comme, si l'on néglige l'enthalpie du liquide qui est évaporé, le processus de saturation adiabatique est un processus à enthalpie par kg d'air sec constant (voir (12.19)), il s'agit de droites qui se superposent aux isothermes humides.

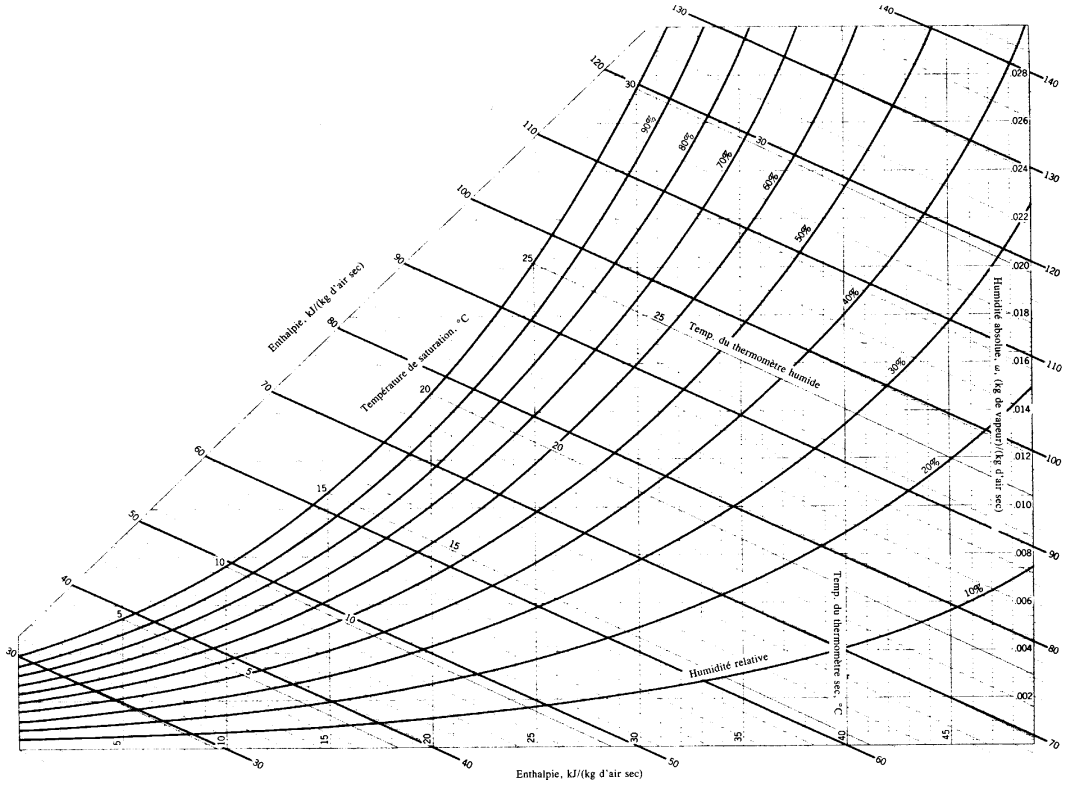


FIG. 12.8 – Le diagramme psychrométrique

Chapitre 13

Notions sur la combustion

Dans la plupart des cycles moteurs étudiés au chapitre 9, les quantités de chaleur nécessaires au fonctionnement du cycle sont obtenues par combustion d'hydrocarbures, c.-à-d. par des réactions chimiques d'oxydation exothermiques.

Ce chapitre est consacré à l'analyse des systèmes subissant de telles réactions chimiques, sur base des premier et second principes. On se bornera à considérer des situations d'équilibre, et par conséquent, on n'abordera pas les phénomènes cinétiques.

13.1 Les combustibles

On commencera par une brève présentation des combustibles courants, à savoir les hydrocarbures. On peut les subdiviser en trois classes : le charbon, les hydrocarbures liquides, et les hydrocarbures gazeux. On s'intéressera uniquement à ces deux dernières classes.

Les hydrocarbures liquides ou gazeux d'usage courant sont des mélanges de plusieurs hydrocarbures. Ainsi, l'essence est un mélange d'environ 40 hydrocarbures principaux. Les hydrocarbures se divisent en plusieurs familles, dont les plus importantes sont énumérées dans le tableau suivant.

Famille	**Formule**	**Structure**	**saturés**
Alcanes	$C_n\ H_{2n+2}$	Acyclique	oui
Alcènes	$C_n\ H_{2n}$	Acyclique	non
Alcynes	$C_n\ H_{2n-2}$	Acyclique	non
Cyclanes	$C_n\ H_{2n}$	Cyclique	oui
Aromatiques			
Benzéniques	$C_n\ H_{2n-6}$	Cyclique	non
Naphtaléniques	$C_n\ H_{2n-12}$	Cyclique	non

Leur structure et leur caractère saturé ou non sont illustrés ci-dessous.

Les alcools sont aussi parfois utilisés combustibles dans les moteurs à combustion interne. Ils se caractérisent par le fait qu'un des atomes d'hydrogène est remplacé par un radical OH.

La plupart des hydrocarbures liquides sont obtenus par distillation et crackage du pétrole brut. A partir de ce dernier, on obtient donc une variété de combustibles dont les plus communs sont l'essence, le kérosène, le gazole et le fuel lourd. Ils se caractérisent par leur courbe

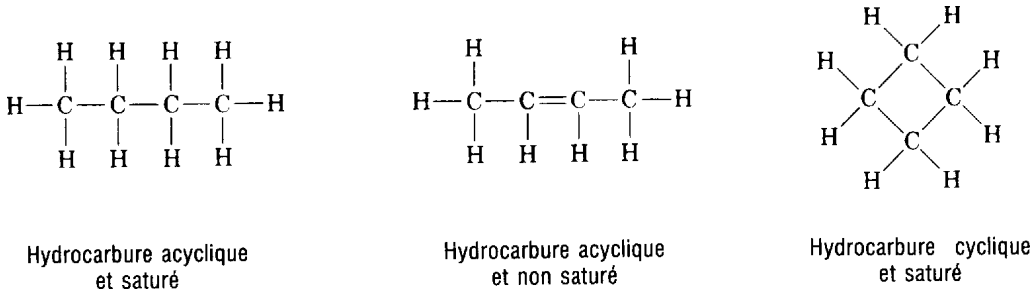
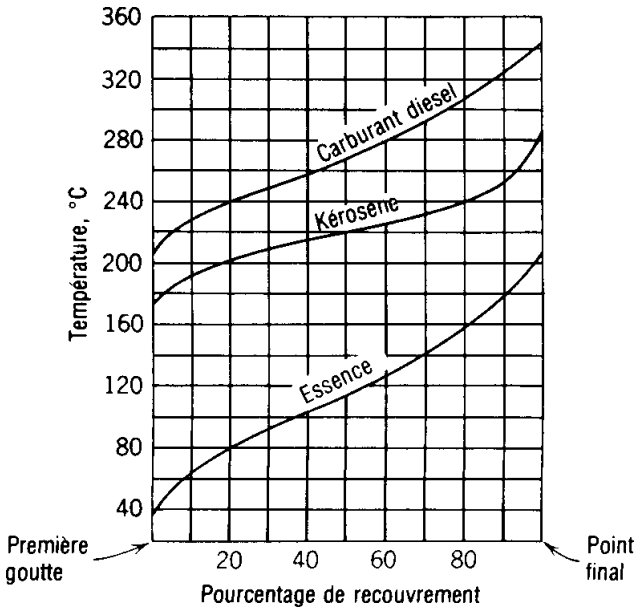


FIG. 13.1 – Les hydrocarbures



On préfère souvent considérer les combustibles liquides comme composés d'un seul hydrocarbure. Ainsi, l'essence est habituellement considérée comme de l'octane C_8 H_{18}, et le gazole comme du dodécane C_{12} H_{26}.

FIG. 13.2 – courbe de distillation de combustibles

de distillation, qui représente la température de la fraction non vaporisée en fonction de la proportion de vapeur condensée.

Les combustibles gazeux proviennent principalement soit de gisements de gaz naturel, soit de procédés chimiques de fabrication. Le gaz naturel est constitué principalement de méthane, contrairement aux gaz de transformation. On donne la composition de quelques combustibles gazeux dans le tableau ci-après à titre indicatif.

Des efforts ont été entrepris au cours des vingt dernières années pour valoriser certains gisements de charbon ou de schistes bitumineux en produisant des combustibles liquides ou gazeux à partir de ceux-ci. ,D,,1

	Gaz naturels divers				Gaz de	Gaz à l'eau	Gaz de
Constituant	**A**	**B**	**C**	**D**	**gazogène**	**carburé**	**four à coke**
Méthane	93,9	60,1	67,4	54,3	3,0	10,2	32,1
Ethane	3,6	14,8	16,8	16,3			
Propane	1,2	13,4	15,8	16,2			
Butane, etc.	1,3	4,2		7,4			
Ethène						6,1	3,5
Benzène						2,8	0,5
Hydrogène					14,0	40,5	46,5
Azote		7,5		5,8	50,9	2,9	8,1
Oxygène					0,6	0,5	0,8
CO					27,0	34,0	6,3
CO_2					4,5	3,0	2,2

13.2 Les réactions de combustion

13.2.1 Equations chimiques de combustion

Les réactions de combustion, comme toutes les réactions chimiques, se font sans variation de masse de chacun des éléments. Les équations chimiques qui décrivent ces réactions doivent donc satisfaire cette contrainte. A titre d'exemple, les réactions de combustion du carbone et du méthane sont respectivement

$$\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2} \tag{13.1}$$

$$\mathrm{CH_4} + 2\mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2} + 2\mathrm{H_2O} \tag{13.2}$$

On distingue dans une telle réaction, les *réactifs*, qui subissent la réaction, que l'on sépare en combustible, qui est l'agent réducteur, tel que ceux mentionnés à la section précédente, et *comburant*, qui est le corps contenant l'agent oxydant, le plus fréquemment l'air. Les produits de la combustion d'hydrocarbures comprennent du dioxyde de carbone (CO_2) et de l'eau, qui selon les conditions de pression et de température, pourra être sous forme liquide ou vapeur.

Pour un hydrocarbure composé uniquement de carbone et d'hydrogène, de formule $\mathrm{C}_x\ \mathrm{H}_y$, la réaction de combustion s'écrit

$$\mathrm{C}_x\mathrm{H}_y + (x + \frac{y}{4})\,\mathrm{O_2} \rightarrow x\,\mathrm{CO_2} + \frac{y}{2}\mathrm{H_2O} \tag{13.3}$$

La réaction est dite *complète* si les gaz brélés ne comprennent, outre les éléments inertes, que des produits complètement oxydés.

En réalité, plusieurs produits intermédiaires sont formés au cours d'une combustion réelle. Comme on s'intéresse ici uniquement aux états d'équilibre initial et final, on ne les considérera pas. Ils s'avèrent néanmoins importants en pratique, en particulier pour les problèmes de pollution.

Dans la plupart des cas, comme on l'a mentionné précédemment, le comburant utilisé est l'air, plutôt que l'oxygène pur. La composition de l'air est approximativement, en fractions molaires, 21% d'oxygène, 78% d'azote, et 1% d'argon. Ces deux dernières substances sont supposées inertes[1], et pour simplifier, on considère que l'air est composé de 21% d'oxygène

[1]En réalité, aux hautes températures atteintes dans les moteurs volumétriques, l'azote réagit avec l'oxygène pour former des oxydes d'azote, qui constituent une source de pollution.

et de 79% d'« azote atmosphérique »auquel on attribue une masse molaire fictive pour tenir compte de la présence d'argon. La réaction de combustion d'un hydrocarbure avec l'air devient donc

$$C_xH_y + (x + \frac{y}{4})\,O_2 + \frac{79}{21}(x + \frac{y}{4})\,N_2 \rightarrow x\,CO_2 + \frac{y}{2}H_2O + \frac{79}{21}(x + \frac{y}{4})\,N_2 \qquad (13.4)$$

13.2.2 Air théorique

La quantité minimale d'air nécessaire à la combustion complète d'un combustible est appelée air strictement nécessaire ou encore *air théorique*.

Pour réaliser la combustion complète avec l'air théorique, il faudrait un mélange parfait. En pratique, pour assurer la combustion complète, il faut un certain excès d'air. Celui-ci est caractérisé par le *coefficient d'air théorique*

$$\lambda = \frac{\text{air utilisé}}{\text{air théorique}}$$

ou encore par le *coefficient d'excès d'air*

$$E = \lambda - 1$$

Dans les moteurs volumétriques, on emploie également la *richesse* Φ, inverse du coefficient d'air théorique. L'équation de combustion complète d'un hydrocarbure avec excès d'air devient

$$C_xH_y + \lambda(x + \frac{y}{4})\,O_2 + \lambda\frac{79}{21}(x + \frac{y}{4})\,N_2 \rightarrow x\,CO_2 + \frac{y}{2}H_2O + E(x + \frac{y}{4})\,O_2 + \lambda\frac{79}{21}(x + \frac{y}{4})\,N_2 \quad (13.5)$$

On utilise également pour cararactériser le mélange de réactifs le rapport air-combustible, le plus souvent en termes massiques, et son inverse, le rapport combustible-air encore appelé *dosage* désigné par le symbole μ.

Lorsque l'air fourni est inférieur à l'air théorique, la combustion est incomplète. Si le manque d'air est faible, on observe la formation de monoxyde de carbone. Pour des manques d'air plus importants, il peut subsister des hydrocarbures imbrélés, ou du carbone sous forme de graphite (noir de fumée).

13.3 L'enthalpie de formation

Lorsqu'on considère des systèmes de composition chimique fixe, comme cela a été le cas jusqu'à présent, on peut sans inconvénient fixer arbitrairement la valeur de l'énergie interne ou de l'enthalpie en un point de référence arbitraire. Ce n'est plus le cas en présence de réactions chimiques.

Dans ce cas, il faut en effet fixer le point de référence de manière cohérente et systématique. On utilise généralement comme conditions de référence une pression de 0,1 MPa et une température de 25 °C[2].

[2]Pour les substances à l'état gazeux, on considère en général un état hypothétique de gaz parfait. Comme on ne considère pas les effets de gaz réels dans ce cours, la distinction n'a pas lieu d'être

Considérons la combustion de carbone solide avec de l'oxygène dans un système ouvert stationnaire.

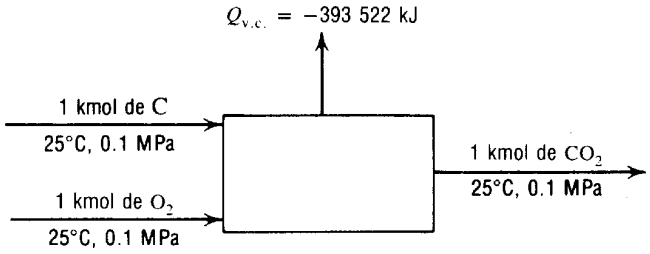


FIG. 13.3 – Combustion de carbone solide avec de l'oxygène dans un système ouvert stationnaire

On suppose que les deux réactifs entrent dans la chambre de combustion à l'état de référence, et que le dioxyde de carbone formé sort à l'état de référence également. Si l'on pouvait mesurer précisément la quantité de chaleur cédée, on obtiendrait une valeur de $\bar{q} = -393\ 522$ kJ/kmol de carbone.

L'équation chimique de réaction étant

$$C + O_2 \rightarrow CO_2$$

le premier principe s'écrit

$$n_C \bar{q} = \sum_P n_s \bar{h}_s - \sum_R n_e \bar{h}_e = n_{CO_2} \bar{h}_{CO_2} - n_C \bar{h}_C - n_{O_2} \bar{h}_{O_2}$$

La mesure de la chaleur échangée nous fournit donc la différence d'enthalpie entre les produits et les réactifs aux conditions de référence. Supposons que l'on attribue une valeur nulle à l'enthalpie des corps simples. Alors, on en déduit que

$$\bar{q} = \bar{h}_{CO_2}$$

On appelle cette enthalpie du dioxyde de carbone considéré comme gaz parfait à l'état de référence *enthalpie de formation* et on la désigne par le symbole $\bar{h}_f^0$. Pour le dioxyde de carbone, on a donc

$$\bar{h}_f^0 = -393\ 522\,\text{kJ/kmol}$$

L'enthalpie du dioxyde de carbone dans d'autres conditions de pression et température peut alors se calculer par

$$\bar{h}(p,T) = \bar{h}_f^0 + (\Delta \bar{h})_{\text{ref} \rightarrow p,T} \tag{13.6}$$

Cette procédure peut s'appliquer à toute autre molécule composée. L'enthalpie de formation de nombreuses substances est disponible dans la littérature (notamment sur le site TESTCenter, module mélange de gaz parfaits(http ://www.ulb.ac.be/sma/testcenter/)).

Remarques complémentaires

1. Le concept d'enthalpie de formation a été défini en termes de la chaleur échangée lors d'une réaction chimique idéalisée. En réalité, l'enthalpie de formation est déterminée par application de la thermodynamique statistique.
2. La validité de la convention par laquelle on attribue une valeur d'enthalpie nulle aux corps simples à l'état de référence repose sur le fait que la masse des éléments se conserve au cours d'une réaction chimique.

3. Lorsqu'un corps simple ou un composé peut exister sous plusieurs formes à l'état de référence, il importe de préciser la forme considérée. Pour les corps simples, la valeur nulle est associée à la forme chimiquement stable à l'état de référence. Par exemple, l'oxygène peut exister sous forme monoatomique, diatomique, ou triatomique (ozone). Comme c'est la forme diatomique qui est stable à l'état de référence, c'est à cette forme qu'est attribuée la valeur nulle.
4. Dans les tables thermodynamiques, on fournit deux valeurs pour l'enthalpie de formation de l'eau, l'une pour l'eau à l'état liquide, l'autre pour l'eau à l'état hypothétique de vapeur. Il s'avère commode d'utiliser la valeur à l'état liquide conjointement avec les tables thermodynamiques de l'eau, et la valeur à l'état de vapeur lorsqu'on emploie le modèle de gaz parfait.

13.4 Analyse des systèmes réactifs à l'aide du premier principe

L'enthalpie de formation est particulièrement utile pour l'analyse des systèmes réactifs, car les enthalpies des diverses substances peuvent s'additionner ou se soustraire. Ainsi, pour un système ouvert en régime, le premier principe s'écrit

$$\dot{Q} + \dot{W} = \sum_P \dot{n}_s \bar{h}_s - \sum_R \dot{n}_e \bar{h}_e$$

où les $\dot{n}$ sont les débits molaires des diverses substances. En divisant par $\dot{n}_{\text{comb}}$, on obtient les grandeurs par kmol de combustible.

Dans la plupart des cas, les réactifs et les produits ne se trouvent pas dans l'état de référence. Pour les solides ou les liquides, la variation d'entalpie entre l'état considéré et l'état de référence s'obtient à partir de tables thermodynamiques. Pour les gaz, avec l'hypothèse de gaz parfaits, on calculera les variations à l'aide des tables de gaz parfaits.

En développant l'expression du premier principe, on obtient donc

$$\dot{Q} + \dot{W} = \sum_P \dot{n}_s (\bar{h}_f^0 + \Delta\bar{h})_s - \sum_R \dot{n}_e (\bar{h}_f^0 + \Delta\bar{h})_e \tag{13.7}$$

13.5 Température adiabatique de flamme

Soit une réaction de combustion se produisant adiabatiquement, sans travail ni variation d'énergie cinétique et potentielle. La température des produits d'une telle réaction est appelée *température adiabatique de flamme* ou de combustion. En vertu des hypothèses d'absence de travail et de variations d'énergie cinétique et potentielle, il s'agit de la température maximum qui peut être atteinte pour les réactifs donnés.

Pour un combustible donné et des pression et température des réactifs donnés, la température adiabatique de flamme est maximale pour un mélange stoechiométrique. La température adiabatique de flamme peut être contrôlée par l'excès d'air utilisé. On la calcule par application du premier principe (13.7) avec $\dot{Q} = \dot{W} = 0$.

13.6 Enthalpie et énergie interne de combustion ; pouvoir calorifique

L'enthalpie de combustion est la différence d'enthalpie entre les produits et les réactifs pour une combustion complète à température et pression données, référée à l'unité de masse ou à l'unité molaire de combustible.

$$\bar{h}_{RP} = \frac{1}{n_{\text{comb}}} \left(\sum_P n_s (\bar{h}_f^0 + \Delta\bar{h})_s - \sum_R n_e (\bar{h}_f^0 + \Delta\bar{h})_e \right) \qquad h_{RP} = \frac{\bar{h}_{RP}}{M_{\text{comb}}} \tag{13.8}$$

On fournit généralement dans les tables les enthalpies de combustion aux conditions normales (25 °C, 0,1 MPa).

L'énergie interne de combustion est définie de manière semblable

$$\bar{u}_{RP} = \frac{1}{n_{\text{comb}}} \left(\sum_P n_s (\bar{h}_f^0 + \Delta\bar{h} - p\bar{v})_s - \sum_R n_e (\bar{h}_f^0 + \Delta\bar{h} - p\bar{v})_e \right) \qquad u_{RP} = \frac{\bar{u}_{RP}}{M_{\text{comb}}} \tag{13.9}$$

Si l'on considère tous les constituants gazeux comme parfaits, et les volumes des constituants liquides et solides négligeables, alors

$$\bar{u}_{RP} = \bar{h}_{RP} - \bar{R}T(n_{\text{prod. gaz.}} - n_{\text{réact. gaz.}}) \tag{13.10}$$

On utilise souvent les expressions *chaleur de réaction* ou *pouvoir calorifique*, qui désignent la chaleur extraite de la chambre de combustion durant une combustion à température constante. Dans le cas d'une combustion isobare, on a par le premier principe que cette chaleur est égale à l'opposée de l'enthalpie de combustion. On l'appelle *pouvoir calorifique isobare*.

$$(\overline{\text{PC}})_{p,T} = -\bar{h}_{RP} \quad \text{ou} \quad (\text{PC})_{p,T} = -h_{RP}$$

Dans le cas d'une combustion à volume constant, la chaleur échangée est égale à l"opposée de l'énergie interne de combustion. On l'appelle *pouvoir calorifique isochore*.

$$(\overline{\text{PC}})_{v,T} = -\bar{u}_{RP} \quad \text{ou} \quad (\text{PC})_{v,T} = -u_{RP}$$

On distingue les pouvoirs calorifiques inférieur (PCI) ou supérieur (PCS) selon que l'eau contenue dans les produits est sous forme de vapeur ou sous forme liquide.

Lorsqu'on calcule les pouvoirs calorifiques des hydrocarbures par les expressions (13.8–13.9), on constate que l'enthalpie de formation de l'hydrocarbure contribue faiblement. Considérant l'équation chimique de combustion générale avec excès d'air (13.5), et compte tenu de ce que les enthalpies de formation de l'oxygène et de l'azote moléculaire sont nulles, le pouvoir calorifique isobare aux conditions normales vaut

$$(\overline{\text{PC}}) = -x\bar{h}^0_{f,\text{CO}_2} - \frac{y}{2}\bar{h}^0_{f,\text{H}_2\text{O}} + \bar{h}_{f,\text{C}_x\text{H}_y} \approx -x\bar{h}^0_{f,\text{CO}_2} - \frac{y}{2}\bar{h}^0_{f,\text{H}_2\text{O}} \tag{13.11}$$

d'on on déduit que

- le pouvoir calorifique de tous les hydrocarbures de même composition molaire (ou massique) en C et H est identique en première approximation, ce qui justifie l'utilisation de la notion de combustible moyen, et

– le pouvoir calorifique est indépendant de la quantité d'espèces inertes (azote) présentes, et de l'excès d'air.

Le pouvoir calorifique est mesuré expérimentalement par les dispositifs suivants :

Bombe de Mahler appareil dans lequel on réalise une combustion à volume constant avec condensation de la vapeur d'eau, dont on déduit le pouvoir calorifique isochore. Convient pour les combustibles solides ou liquides.

Calorimètre de Junkers appareil dans lequel on réalise une combustion isobare en système ouvert stationnaire, dont on déduit le pouvoir calorifique isobare. Convient pour les combustibles gazeux (voir laboratoire).

13.7 Le troisième principe de la thermodynamique et l'entropie absolue

Pour pouvoir analyser les réactions chimiques du point de vue du second principe, se pose, comme pour l'application du premier principe, la question de l'état de référence approprié pour les diverses substances présentes. Pour répondre à cette question, il est nécessaire d'invoquer le *troisième principe de la thermodynamique*, formulé à la suite des travaux de Nernst et Planck, selon lequel

l'entropie d'un cristal parfait est nulle au zéro absolu.

Ce principe fournit donc un point de référence absolu à partir duquel on peut évaluer l'entropie d'une substance. L'entropie définie de la sorte est désignée sous le nom d'*entropie absolue*. On peut la déterminer expérimentalement par des mesures calorimétriques ou à l'aide de la thermodynamique statistique. Les entropies absolues des solides et liquides aux conditions normales sont disponibles dans la littérature (p.ex. livre de Van Wylen et al.). Elles sont désignées par le symbole $\bar{s}^0$. Pour les gaz parfaits, l'entropie absolue à une pression $p_0 = 0,1$ MPa est tabulée en fonction de la température. On en déduit l'entropie absolue à une pression quelconque par l'expression

$$\bar{s}_{p,T} = \bar{s}^0_T - \bar{R} \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)$$

Pour les mélanges de gaz parfaits, on applique la relation (12.13)

$$\bar{s}_{\text{mél}} = \sum_i y_i \bar{s}_i(T, p_i) = \sum_i y_i (\bar{s}^0_{i_T} - \bar{R} \ln \left(\frac{y_i p}{p_0} \right))$$

13.8 Analyse des systèmes réactifs à l'aide du second principe

On a établi au chapitre 8 l'expression du travail réversible pour une transformation de système ouvert stationnaire en contact avec diverses sources de chaleur. En l'absence de variations d'énergie cinétique et potentielle, et de sources de chaleur autres que l'ambiance, l'expression générale (8.11) devient

$$\dot{W}^*_{\text{rév}} = \sum \dot{m}_e (h_e - T_0 s_e) - \sum \dot{m}_s (h_s - T_0 s_s)$$

Dans le cas d'une transformation avec réaction chimique, cette expression devient, pour un intervalle de temps donné

$$W^*_{\text{rev}} = \sum_R n_e(\bar{h}^0_f + \Delta\bar{h} - T_0\bar{s})_e - \sum_P n_s(\bar{h}^0_f + \Delta\bar{h} - T_0\bar{s})_s \tag{13.12}$$

et l'irréversibilité vaut, elle,

$$I = \sum_P n_s T_0 \bar{s}_s - \sum_R n_e T_0 \bar{s}_e - Q \tag{13.13}$$

Pour une transformation telle que les réactifs et les produits soient en équilibre de température avec l'ambiance, le groupe $h - T_0 s$ est égal à l'énergie libre de Gibbs, de sorte qu'en l'absence de variations d'énergie cinétique et potentielle, le travail réversible devient

$$W^*_{\text{rev}} = \sum_R n_e \bar{g}_e - \sum_P n_s \bar{g}_s \tag{13.14}$$

Examinons à présent la question du travail maximum qui peut être effectué au cours d'une réaction chimique, les réactifs étant à température ambiante. Ce travail sera obtenu si la réaction est réversible et si les produits sont en équilibre de pression et de température avec l'ambiance, et est donc donné par l'expression précédente (13.14), c.-à-d. qu'il est égal à la diminution de l'énergie libre de Gibbs.

Par conséquent, le rendement exergétique d'un dispositif destiné à produire du travail au moyen d'une combustion, comme un moteur volumétrique, s'exprime comme le rapport entre le travail réellement fourni et la diminution de l'énergie libre de Gibbs $-\bar{g}_{RP}$. Or, la définition habituellement utilisée du rendement est le rapport entre le travail fourni et le pouvoir calorifique $-\bar{h}_{RP}$. En pratique, comme pour les hydrocarbures, $\bar{g}_{RP} \approx \bar{h}_{RP}$, les valeurs sont très proches.

Illustrons les irréversibilités se produisant lors des combustions par un exemple. Considérons la combustion isobare et adiabatique d'éthène (C_2H_4) gazeux dans un système ouvert stationnaire avec un coefficient d'air théorique de 400%, les réactifs étant aux conditions normales. L'équation chimique générale de réaction devient dans ce cas particulier ($x = 2, y = 4, \lambda = 4$)

$$C_2H_4 + 4(3)\,O_2 + 4\frac{79}{21}(3)\,N_2 \rightarrow 2\,CO_2 + 2H_2O + 3(3)\,O_2 + 4\frac{79}{21}(3)\,N_2$$

Les données thermodynamiques des réactifs et des produits aux conditions normales sont données au tableau ci-dessous :

	C_2H_4	O_2	N_2	CO_2	H_2O
M (kg/kmol)	28,054	31,999	28,013	44,01	18,015
$\bar{h}^0_f$ (kJ/kmol)	52 467	0	0	-393 522	-241 826
$\bar{s}^0$ (kJ/kmol·K)	219,330	205,148	191,609	213,794	188,835

Commençons par calculer le pouvoir calorifique isobare (inférieur puisque l'eau sera à l'état de vapeur) aux conditions standard

$$(\overline{\text{PCI}}) = \bar{h}^0_{f,C_2H_4} - 2\bar{h}^0_{f,CO_2} - 2\bar{h}^0_{f,H_2O} = 1\,323\,163\,\text{kJ/kmol}$$

La température adiabatique de flamme s'obtient par l'expression (13.7)

$$\begin{aligned}\sum_P n_s(\bar{h}_f^0 + \Delta\bar{h})_s(T_{\rm ad}) - \sum_R n_e(\bar{h}_f^0 + \Delta\bar{h})_e &= \sum_P n_s\Delta\bar{h}_s(T_{\rm ad}) - (\overline{\rm PCI}) \\ = \quad [2\Delta\bar{h}_{\rm CO_2} + 2\Delta\bar{h}_{\rm H_2O} + 9\Delta\bar{h}_{\rm O_2} + 45,1\Delta\bar{h}_{\rm N_2}](T_{\rm ad}) - (\overline{\rm PCI}) &= 0\end{aligned}$$

Résolvant itérativement cette équation, on trouve $T_{\rm ad} = 1016$ K. Remarquez que, avec l'hypothèse de gaz parfaits, la température de flamme ne dépend pas directement des pressions partielles des constituants.

Calculons à présent le travail réversible. Comme les constituants sont chacun à leur pression partielle de mélange, on calcule d'abord les entropies de chaque constituant à sa pression partielle. On trouve

	C_2H_4	O_2	N_2	CO_2	H_2O
$\bar{s}_R^0$ (kJ/kmol·K)	253,109	218,267	193,713		
$\bar{s}_P^0$ (kJ/kmol·K)		220,659	193,713	241,810	216,851

et par conséquent

$$W^*_{\rm rev} = ({\rm PCI}) - T_0[\sum_R n_e s_e - \sum_P n_s s_s] = 1\ 332\ 387\,{\rm kJ/kmol}$$

qui est effectivement très proche du pouvoir calorifique, comme on l'a précédemment indiqué.

L'irréversibilité au cours de la transformation est donnée par l'équation (13.13) avec $Q = 0$ puisqu'il s'agit d'une combustion adiabatique.

$$I = \sum_P n_s T_0 \bar{s}_s - \sum_R n_e T_0 \bar{s}_e = 672\ 625\,{\rm kJ/kmol}$$

c.-à-d. à peu près la moitié du travail réversible !

On vérifie ce résultat en calculant l'exergie des produits :

$$J_P = \sum_P n_s[(\bar{h}_s - \bar{h}_0) - T_0(\bar{s}_s - \bar{s}_0)] = 659\ 762\,{\rm kJ/kmol} = W^*_{\rm rev} - I$$

Par conséquent, si à la suite de la combustion adiabatique, on ramenait les produits à l'équilibre avec l'ambiance de manière réversible, le travail effectué ne serait qu'environ la moitié du travail qui pourrait être effectué si la combustion était réversible, et donc le rendement exergétique d'un moteur dans lequel se produirait cette combustion isobare ne pourrait dépasser 50 %.

Se pose dès lors la question de la possibilité de réaliser la réaction chimique de combustion de manière réversible. On peut s'approcher de la réversibilité au moyen d'un processus électrochimique : la *pile à combustible*. Le principe en est connu depuis longtemps, mais jusqu'il y a peu, leur puissance spécifique (volumique, massique) très faible et leur coét élevé les réservait à des applications spéciales. Des recherches intensives récentes entreprises notamment par les constructeurs automobiles ont permis de faire des progrès spectaculaires, de sorte que l'on peut en entrevoir l'application à grande échelle à moyen terme.

13.9 Evaluation des procédés réels de combustion

On caractérise l'efficacité d'un procédé réel de combustion au moyen de divers paramètres, selon l'application considérée.

Chambre de combustion (turbine à gaz) Dans ce cas, si la combustion était complète et adiabatique, la température de sortie serait la température adiabatique de flamme. En réalité, la combustion n'est pas parfaite (formation d'oxydes d'azote p. ex.) et il se produit une perte de chaleur vers l'ambiance, de sorte que la quantité de combustible nécessaire pour obtenir une température donnée est plus élevée que pour une combustion complète et adiabatique. On définit dès lors le *rendement de combustion* η_{comb} comme

$$\eta_{\text{comb}} = \frac{\mu_{\text{idéal}}}{\mu_{\text{réel}}} \tag{13.15}$$

Générateur de vapeur Dans ce cas, l'objectif est de transmettre un maximum de chaleur à la vapeur d'eau. On définit dès lors le rendement comme

$$\eta_{\text{gén. de vap.}} = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}_c(\text{PCS})} = \frac{\dot{m}_v(h_{v,s} - h_{v,e})}{\dot{m}_c(\text{PCS})} \tag{13.16}$$

Moteur volumétrique à combustion interne Pour un moteur, l'effet utile est le travail fourni. La manière logique de caractériser sa performance serait par conséquent d'employer son rendement exergétique. En pratique toutefois, on emploie plutôt le *rendement thermique* η_{th} défini comme

$$\eta_{\text{th}} = \frac{\dot{W}^*}{\dot{m}_c(\text{PCS})} \tag{13.17}$$

Comme on l'a déjà souligné, comme la variation d'énergie libre lors d'une combustion d'hydrocarbures diffère peu de l'enthalpie de combustion, le rendement thermique ainsi défini est fort proche du rendement exergétique.

On utilise également cette définition pour caractériser le rendement global d'une turbine à gaz ou d'une centrale thermique à vapeur. Comme on l'a souligné à la section précédente, l'irréversibilité de combustion contribue grandement à la faible valeur du rendement.

Chapitre 14

Ecoulements compressibles

Dans de nombreuses applications sont employés des dispositifs dont la fonction est de transformer de l'énergie cinétique en énergie interne ou vice-versa, sans échange de travail : tuyères propulsives de turboréacteurs ou de moteurs-fusée, aubages distributeurs de turbines à gaz ou à vapeur, diffuseurs, aubages redresseurs de compresseurs. On les a d'ailleurs mentionnés spécifiquement à la section 7.16 consacrée aux notions de rendement.

Et il en est de même pour les aubages mobiles des pompes, compresseurs et turbines, *lorsqu'on se place en repère relatif*. C'est d'ailleurs la caractéristique fondamentale des turbomachines comme convertisseurs d'énergie (par rapport aux machines volumétriques) que d'effectuer la transformation d'énergie interne en travail ou vice-versa *via le passage par l'énergie cinétique*.

On consacrera dès lors ce chapitre à l'aspect thermodynamique des écoulements dans de tels dispositifs, en se limitant à l'étude des écoulements unidimensionnels. Les écoulements compressibles bidimensionnels font l'objet du cours MECA 339 Dynamique des gaz en 5^{e}MECA.

14.1 Variables totales ou d'arrêt

Rappelons le concept de variables totales ou d'arrêt introduites à la section 7.16. On appelle état d'arrêt isentropique d'un fluide qui s'écoule, l'état que ce fluide atteindrait si on l'amenait à l'arrêt de manière adiabatique et réversible (et donc isentropique). En désignant les conditions d'arrêt ou totales par l'indice supérieur 0, on a donc

$$h^0 = h + \frac{c^2}{2} \qquad s^0 = s \tag{14.1}$$

L'état d'arrêt isentropique se représente aisément sur un diagramme de Mollier . Dans le cas des gaz parfaits à chaleurs massiques constantes, la pression totale ou pression d'arrêt se calcule aisément à l'aide des expressions décrivant les transformations isentropiques (7.31)

$$\frac{p^0}{p} = \left(\frac{T^0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{h^0}{h}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

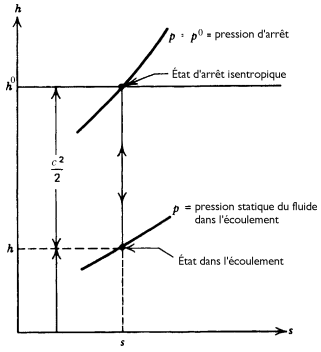


FIG. 14.1 – L'état d'arrêt isentropique se représente aisément sur un diagramme de Mollier

14.2 Théorème de la résultante cinétique

On rappellera tout d'abord le théorème de la résultante cinétique établi au cours de Mécanique des milieux continus. Pour un système fermé, le théorème de la résultante cinétique (2$^{\text{e}}$loi de Newton) s'écrit simplement

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_F}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_V + \vec{F}_S$$

où $\vec{P}_F$ est la quantité de mouvement du système fermé, et $\vec{F}_V$ et $\vec{F}_S$ respectivement les forces de volume et de surface qui s'appliquent sur le système.

La généralisation à un système ouvert s'obtient en suivant exactement la même démarche que pour les premier et second principe (voir sections 5.10 et 7.12). Le taux de variation de la quantité de mouvement du système fermé constitué de la matière initialement contenue dans le système ouvert considéré est relié à celui du système ouvert par

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}_O}{\mathrm{d}t} + \oint_S \rho\vec{c}(\vec{c} - \vec{b}_O)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}\vec{P}_O}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s\vec{c}_s - \sum \dot{m}_e\vec{c}_e \tag{14.2}$$

puisque la quantité de mouvement massique n'est rien d'autre que la vitesse $\vec{c}$. Et comme les forces s'appliquant sur le système ouvert sont identiques à celles s'appliquant sur le système fermé au moment initial où ils coïncident, on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}_O}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s\vec{c}_s - \sum \dot{m}_e\vec{c}_e = \vec{F}_V + \vec{F}_S \tag{14.3}$$

et, dans le cas particulier d'un système en régime stationnaire

$$\sum \dot{m}_s\vec{c}_s - \sum \dot{m}_e\vec{c}_e = \vec{F}_V + \vec{F}_S \tag{14.4}$$

résultat abondamment employé au cours de Phénomènes de transport pour calculer les forces s'appliquant sur des systèmes ouverts (p. ex. sur le coude d'une canalisation).

14.3 L'écoulement (quasi-)unidimensionnel stationnaire

Considérons à présent l'écoulement dans une canalisation droite de section variable $A(x)$, telle que représentée ci-dessous.

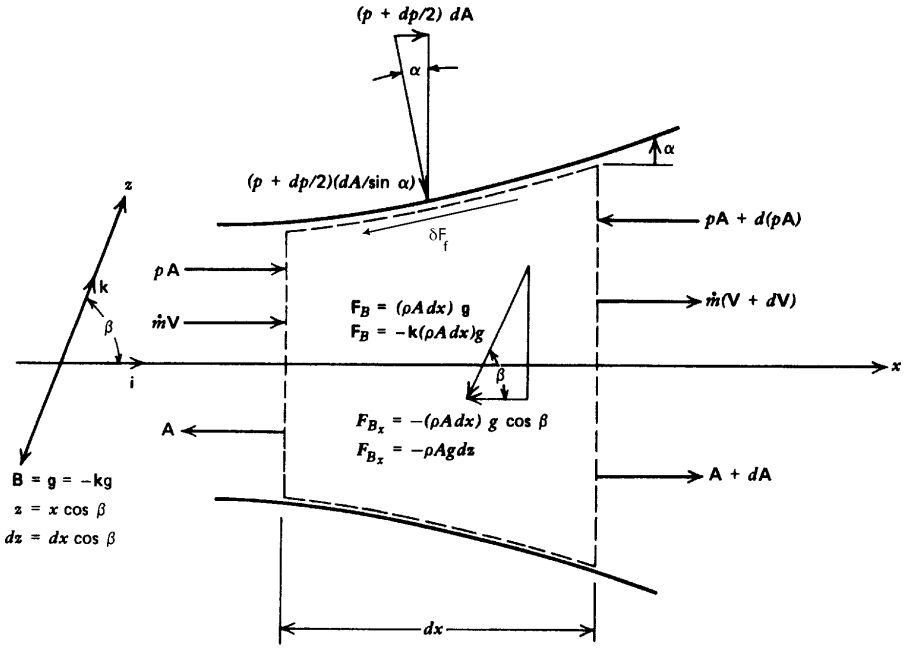


FIG. 14.2 – écoulement dans une canalisation droite de section variable $A(x)$

On considère l'écoulement *quasi-unidimensionnel*, c.-à-d. qu'on suppose que la variation de section est suffisamment lente pour qu'on puisse faire l'approximation que les variables de l'écoulement (vitesse et variables thermodynamiques) sont uniformes à travers la section, et ne dépendent donc que de la coordonnée x.

Appliquons les équations des systèmes ouverts à une tranche dx de la canalisation.

14.3.1 Conservation de la masse

$$\dot{m}(x+dx) - \dot{m}(x) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\dot{m}}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{14.5}$$

ou encore, comme $\dot{m} = \rho c A$,

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}c}{c} + \frac{\mathrm{d}A}{A} = -\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}c}{c} + \frac{\mathrm{d}A}{A} = 0 \tag{14.6}$$

14.3.2 Théorème de la résultante cinétique

$$\dot{m}(c+\mathrm{d}c) - \dot{m}c = -[pA + \mathrm{d}(pA)] + pA + (p + \frac{\mathrm{d}p}{2})\mathrm{d}A - \delta F_\mathrm{f} - \rho g A \mathrm{d}z \tag{14.7}$$

En simplifiant, et en négligeant les termes d'ordre supérieur, il reste

$$\dot{m}\mathrm{d}c = \rho A c \mathrm{d}c = -A\mathrm{d}p - \delta F_\mathrm{f} - \rho g A \mathrm{d}z \tag{14.8}$$

ou, en divisant par ρA,

$$c\mathrm{d}c + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + g\mathrm{d}z = -\frac{\delta F_\mathrm{f}}{\rho A} \tag{14.9}$$

relation qui, en l'absence de frottement ($\delta F_\mathfrak{f} = 0$), n'est rien d'autre que la forme différentielle de l'équation de Bernoulli (7.47).

Pour les écoulements de fluides compressibles auxquels on s'intéresse, la contribution de la force de volume est négligeable, et sera ignorée dans la suite.

On exprime la force de frottement au moyen d'un coefficient adimensionnel défini comme suit

$$\delta\mathcal{F} = \frac{\delta F_\mathfrak{f}}{\frac{1}{2}\rho c^2 A}$$

de sorte qu'on obtient finalement l'expression suivante du théorème de la résultante cinétique

$$c\mathrm{d}c + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{c^2}{2}\delta\mathcal{F} = 0 \tag{14.10}$$

Le frottement $\delta F_\mathfrak{f}$ comprend tout à la fois le frottement visqueux aux parois et la traînée des corps éventuellement plongés dans l'écoulement. La contribution du frottement visqueux aux parois s'exprime généralement en termes d'un coefficient de frottement $\mathfrak{f}$ défini par l'expression

$$\mathfrak{f} = \frac{\delta F_{\mathfrak{f},p}}{\frac{1}{2}\rho c^2 (PM)\mathrm{d}x} = \frac{A}{(PM)\mathrm{d}x}\delta\mathcal{F}_p \tag{14.11}$$

où (PM) est le périmètre mouillé. En définissant le diamètre hydraulique $D_h = 4A/(PM)$, on a donc

$$\delta\mathcal{F}_p = 4\mathfrak{f}\frac{\mathrm{d}x}{D_h}$$

de sorte que, en notant δX la contribution de la traînée des corps immergés, on a

$$\delta\mathcal{F} = 4\mathfrak{f}\frac{\mathrm{d}x}{D_h} + \frac{\delta X}{\frac{1}{2}\rho c^2 A}$$

14.3.3 Premier principe

En négligeant l'énergie potentielle, le premier principe s'écrit

$$\dot{m}(h + \frac{c^2}{2} + \mathrm{d}(h + \frac{c^2}{2})) - \dot{m}(h + \frac{c^2}{2}) = \delta\dot{Q} \tag{14.12}$$

et donc,

$$\mathrm{d}(h + \frac{c^2}{2}) = \frac{\delta\dot{Q}}{\dot{m}} = \delta q = \mathrm{d}h^0 \tag{14.13}$$

14.3.4 Second principe

$$\dot{m}(s + \mathrm{d}s) - \dot{m}s \geq \frac{\delta\dot{Q}}{T} \tag{14.14}$$

ou, en divisant par le débit massique

$$\mathrm{d}s \geq \frac{\delta q}{T} = \frac{\mathrm{d}h^0}{T} \tag{14.15}$$

14.4 La vitesse du son et le nombre de Mach

On va à présent appliquer les résultats de la section précédente pour déterminer la vitesse de propagation d'une petite perturbation de pression, c.-à-d. la vitesse du son.

Considérons une perturbation de pression infinitésimale d'amplitude dp créée par le déplacement d'un piston avec une vitesse infinitésimale dc à l'extrémité d'un tube.

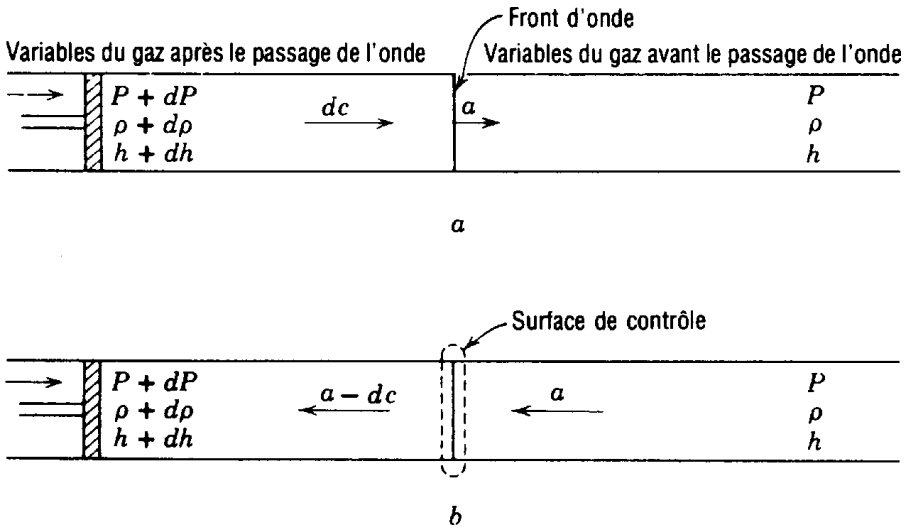


FIG. 14.3 – La vitesse du son et le nombre de Mach

La perturbation se propage dans le tube sous la forme d'une onde plane se déplaçant à une vitesse a. Plaçons-nous dans un référentiel lié à l'onde. Comme la surface du tube est constante (d$A = 0$), et en supposant la transformation adiabatique et réversible, les équations s'appliquant à une tranche de tube dx autour de l'onde s'écrivent, en appelant $w = c - a$ la vitesse dans le référentiel choisi

$$\mathrm{d}(\rho w) = \rho \mathrm{d}w + w\mathrm{d}\rho = \rho \mathrm{d}c - a\mathrm{d}\rho = 0 \tag{14.16}$$

$$c\mathrm{d}c + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = -a\mathrm{d}c + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = 0 \tag{14.17}$$

$$\mathrm{d}h + c\mathrm{d}c = \mathrm{d}h - a\mathrm{d}c = 0 \tag{14.18}$$

$$\mathrm{d}s = 0 \tag{14.19}$$

On peut remarquer que les trois dernières équations sont évidemment liées entre elles, car l'absence de frottement va de pair avec la réversibilité. En vertu de la relation de Gibbs d$h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p$, d$h = v\mathrm{d}p$, et donc les 2$^{\mathrm{e}}$et 3$^{\mathrm{e}}$équations sont identiques.

Eliminant dc entre les deux premières équations, on obtient

$$\mathrm{d}p - a^2\mathrm{d}\rho = 0 \tag{14.20}$$

dont on déduit l'expression de la vitesse de la perturbation a

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \tag{14.21}$$

que l'on peut également exprimer en fonction du coefficient d'élasticité adiabatique B_s (voir section 11.5). En effet,

$$B_s = -v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rightarrow a^2 = \frac{B_s}{\rho}$$

Evaluons cette expression dans le cas d'un gaz parfait. En vertu de la relation

$$\frac{\mathrm{d}s}{R} = \frac{k}{k-1}\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{1}{k-1}\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{k}{k-1}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{1}{k-1}\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

établie à la section 7.10, on déduit

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = k\frac{p}{\rho} = kRT \tag{14.22}$$

Un paramètre très important d'un écoulement compressible est le *nombre de Mach*, défini comme le rapport entre la vitesse c et la vitesse du son a

$$M \equiv \frac{c}{a} \tag{14.23}$$

Lorsque $M < 1$, l'écoulement est dit *subsonique* ; lorsque $M > 1$, il est dit *supersonique*, et lorsque $M = 1$, l'écoulement est sonique.

14.5 Equations des écoulements unidimensionnels de gaz parfaits en fonction du nombre de Mach

Pour la suite des discussions, il s'avère intéressant de réécrire les équations des écoulements unidimensionnels de gaz parfaits en fonction du nombre de Mach.

Equation de conservation de la masse

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}c}{c} + \frac{\mathrm{d}A}{A} = 0 \tag{14.24}$$

Equation de quantité de mouvement (résultante cinétique) En divisant l'équation de quantité de mouvement (14.10)

$$c\mathrm{d}c + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{c^2}{2}\delta\mathcal{F} = 0$$

par $p/\rho = a^2/k$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + kM^2\frac{\mathrm{d}c}{c} + \frac{kM^2}{2}\delta\mathcal{F} = 0 \tag{14.25}$$

Equation de l'énergie (premier principe) L'équation de l'énergie (14.13)

$$\mathrm{d}(h + \frac{c^2}{2}) = \mathrm{d}h^0$$

s'intègre immédiatement pour donner

$$h + \frac{c^2}{2} = h^0 \tag{14.26}$$

qui n'est rien d'autre que la définition de l'enthalpie totale. Pour un gaz parfait à chaleurs massiques constantes,

$$h = c_p T = \frac{kRT}{k-1} = \frac{a^2}{k-1} \tag{14.27}$$

de sorte que l'on peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$h(1+\frac{k-1}{2}M^2)=h^0 \quad \Leftrightarrow \quad T(1+\frac{k-1}{2}M^2)=T^0 \tag{14.28}$$

En en prenant la dérivée logarithmique, on obtient la forme différentielle

$$\frac{\mathrm{d}h}{h}+\frac{(k-1)M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\frac{\mathrm{d}M}{M}=\frac{\mathrm{d}h^0}{h^0} \tag{14.29}$$

Equation des gaz parfaits En prenant la dérivée logarithmique de l'équation des gaz parfaits $p=\rho RT$, on obtient la forme logarithmique

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}T}{T}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}h}{h} \tag{14.30}$$

Définition du nombre de Mach En prenant la dérivée logarithmique de la définition du nombre de Mach $M=c/a$, on obtient la forme différentielle

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=\frac{\mathrm{d}c}{c}-\frac{\mathrm{d}a}{a}=\frac{\mathrm{d}c}{c}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}T}{T}=\frac{\mathrm{d}c}{c}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}h}{h} \tag{14.31}$$

Résumé En rassemblant les diverses équations, on obtient le système différentiel

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}c}{c}+\frac{\mathrm{d}A}{A}=0\\
&\frac{\mathrm{d}p}{p}+kM^2\frac{\mathrm{d}c}{c}+\frac{kM^2}{2}\delta\mathcal{F}=0\\
&\frac{\mathrm{d}h}{h}+\frac{(k-1)M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\frac{\mathrm{d}M}{M}=\frac{\mathrm{d}h^0}{h^0}\\
&\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}h}{h}\\
&\frac{\mathrm{d}M}{M}=\frac{\mathrm{d}c}{c}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}h}{h}
\end{aligned} \tag{14.32}$$

que l'on peut résoudre pour $\mathrm{d}M/M$, $\mathrm{d}c/c$, $\mathrm{d}p/p$, $\mathrm{d}\rho/\rho$ et $\mathrm{d}h/h$ en fonction de $\mathrm{d}A/A$ (effet de la variation de section), de $\delta\mathcal{F}$ (effet du frottement) et de $\mathrm{d}h^0/h^0$ (effet d'un apport de chaleur). Nous allons étudier chacun de ces effets successivement.

14.6 Ecoulement unidimensionnel isentropique avec variation de section

14.6.1 Effet de la variation de section

Examinons l'effet de la variation de section dans le cas général d'un fluide d'équation d'état quelconque. Les équations de conservation de la masse et de l'énergie sont respectivement

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}c}{c}+\frac{\mathrm{d}A}{A}=0$$
$$\mathrm{d}(h+\frac{c^2}{2})=\mathrm{d}h+c\mathrm{d}c=0$$

L'écoulement étant isentropique $\mathrm{d}h = v\mathrm{d}p = va^2\mathrm{d}\rho$. Par conséquent, l'équation de l'énergie peut se réécrire

$$a^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + c\mathrm{d}c = 0 \tag{14.33}$$

Résolvant pour $\mathrm{d}\rho/\rho$ et insérant dans l'équation de conservation de la masse, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}c}{c}(1-M^2) + \frac{\mathrm{d}A}{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}A}{A} = -\frac{\mathrm{d}c}{c}(1-M^2) = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho c^2}(1-M^2) \tag{14.34}$$

Ce résultat a une grande importance, car il permet de déterminer la forme à donner à la conduite pour effectuer une détente (tuyères) ou une compression (diffuseurs).

Pour une tuyère ($\mathrm{d}p < 0$), elle doit être convergente ($\mathrm{d}A < 0$) si l'écoulement est subsonique ($M < 1$) et divergente ($\mathrm{d}A > 0$) si l'écoulement est supersonique ($M > 1$). Inversément, un diffuseur doit être divergent ($\mathrm{d}A > 0$) si l'écoulement est subsonique ($M < 1$) et convergent si l'écoulement est supersonique ($M > 1$).

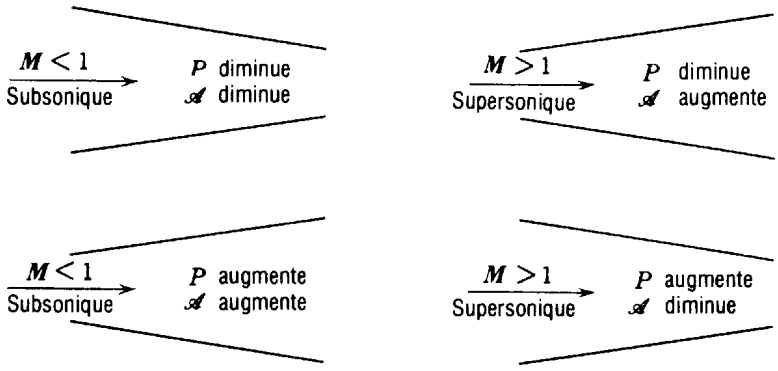


FIG. 14.4 – Ecoulement unidimensionnel isentropique avec variation de section

On en déduit également que l'écoulement ne peut être sonique que là où la section passe par un extremum ($\mathrm{d}S = 0$) qui, compte tenu de la discussion précédente doit être un minimum, c'est-à-dire en un *col*.

Si l'écoulement est sonique au col, alors l'évolution en aval du col peut être soit subsonique, soit supersonique. C'est la condition aux limites en aval du divergent qui détermine lequel des deux comportements se réalise.

14.6.2 Saturation

Supposons que l'on accélère un écoulement subsonique dans un convergent (ou que l'on décélère un écoulement supersonique dans ce même convergent). Comme pour tous les fluides compressibles, la vitesse du son diminue lorsque la température diminue, le nombre de Mach varie dans le même sens que la vitesse. Il augmente donc pour un écoulement subsonique et diminue pour un écoulement supersonique. Toutefois, en vertu de l'équation (14.34), le nombre de Mach ne peut pas atteindre l'unité à l'intérieur du convergent, seulement à son extrémité. On appelle ce phénomène la *saturation* de la tuyère.

Si l'on accélère un fluide de conditions d'arrêt données au moyen d'une tuyère convergente en diminuant la pression régnant en aval de celle-ci, la vitesse à la section de sortie, et donc aussi le débit, augmentent jusqu'à ce que les conditions soniques y soient atteintes. Ils ne changent plus si on continue à réduire la pression.

On déduit également qu'on ne peut accélérer un écoulement jusqu'à des conditions supersoniques qu'au moyen d'une tuyère convergente-divergente, que l'on appelle *tuyère de Laval*.

14.6.3 Ecoulement de gaz parfait

Dans le cas des gaz parfaits à chaleurs massiques constantes, on peut intégrer les équations (14.32) analytiquement. On a déjà établi la relation

$$T^0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)$$

Comme l'écoulement est isentropique, on en déduit

$$p^0 = p\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{14.35}$$

$$\rho^0 = \rho\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{14.36}$$

En particulier, les conditions au point sonique, appelées conditions critiques et désignées par l'indice supérieur *, ont les valeurs suivantes

$$\frac{T^*}{T^0} = \frac{2}{k+1} \tag{14.37}$$

$$\frac{p^*}{p^0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{14.38}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho^0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{14.39}$$

On en déduit les expressions des rapports entre variables locales et critiques

$$\frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)} \tag{14.40}$$

$$\frac{p}{p^*} = \left[\frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)}\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{14.41}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left[\frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)}\right]^{\frac{1}{k-1}} \tag{14.42}$$

La vitesse c vaut, elle

$$c = Ma = M\left[\frac{kRT^0}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{\frac{1}{2}} = c^* M\left[\frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{14.43}$$

et l'on constate qu'elle tend vers une valeur limite pour $M \to \infty$

$$c_{\max} = \sqrt{2\frac{kR}{k-1}T^0} = \sqrt{2c_pT^0} \tag{14.44}$$

Comme le débit massique $\dot{m} = \rho c A$ se conserve, on en déduit

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* c^*}{\rho c} = \frac{1}{M}\left[\frac{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)}{k+1}\right]^{\frac{1}{k-1}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{M}\left[\frac{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)}{k+1}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{14.45}$$

Cette dernière relation est représentée ci-dessous. Elle confirme la conclusion antérieure que le nombre de Mach d'un écoulement subsonique augmente dans une tuyère convergente et celui d'un écoulement supersonique dans une tuyère divergente.

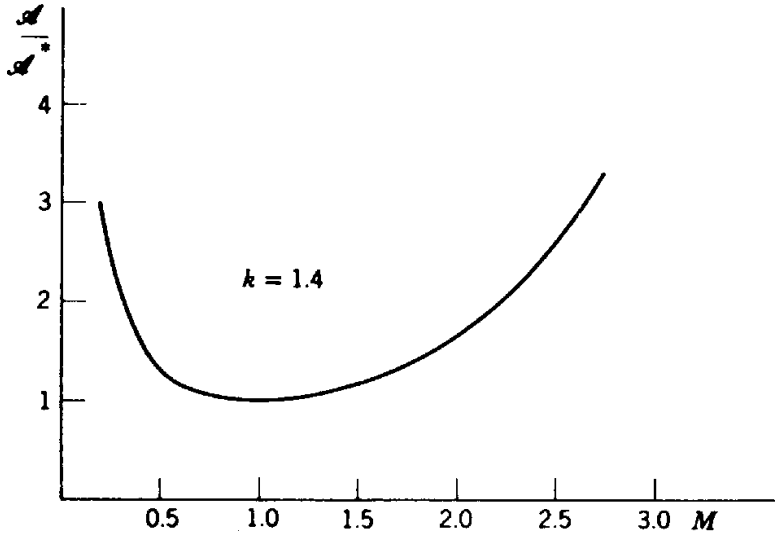


FIG. 14.5 – e nombre de Mach d'un écoulement subsonique augmente dans une tuyère convergente et celui d'un écoulement supersonique dans une tuyère divergente

A partir des expressions précédentes, on peut calculer le débit massique passant par une section donnée

$$\dot{m} = \rho c A = \rho M a A = \rho^0 a^0 M \frac{\rho}{\rho^0}\frac{a}{a^0} = \frac{k p^0}{a^0} M \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} = \frac{k p^0}{a^0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\frac{A^*}{A}$$

On peut encore exprimer ce résultat en fonction du rapport de pression p/p^0. Comme

$$\frac{p}{p^0} = \left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{-\frac{k}{k-1}} \quad \rightarrow \quad M = \left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p}{p^0}\right)^{-\frac{k-1}{k}} - 1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

on obtient finalement

$$\dot{m} = \frac{k p^0}{a^0}\left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{k+1}{2k}}\left\{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p}{p^0}\right)^{-\frac{k-1}{k}} - 1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{p^0}{a^0}\left\{\frac{2k^2}{k-1}\left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{2}{k}}\left[1-\left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{14.46}$$

Le terme entre accolades est appelé coefficient de débit et est désigné par le symbole ψ. Comme il est proportionnel au rapport A^*/A, il passe par un maximum lorsque l'écoulement est localement sonique, c.-à-d. pour

$$\frac{p}{p^0} = \frac{p^*}{p^0}$$

Il va de soi que ce débit ne peut être atteint qu'à la section minimum (sortie pour une tuyère convergente, col pour une tuyère de Laval).

14.6.4 Ecoulement dans une tuyère de forme donnée

Considérons une tuyère de forme donnée alimentée par un fluide de conditions totales données et étudions le comportement de l'écoulement en fonction de la pression aval p_s. Si la pression aval est égale à la pression d'arrêt, le fluide est entièrement au repos. Si l'on baisse la pression aval, un écoulement s'établit dans la tuyère. Tant que le rapport de pression p_s/p^0 est tel que

$$\frac{A_s}{A_{\text{col}}} < \frac{A}{A^*}(M_s) \qquad \text{avec} \qquad M_s = \left\{ \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p_s}{p^0} \right)^{-\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

l'écoulement est subsonique au col, et il existe une solution unique (cas b de la figure suivante). En effet, en vertu de la relation précédente, $A^* < A_{\text{col}}$, et donc $M_{\text{col}} < 1$.

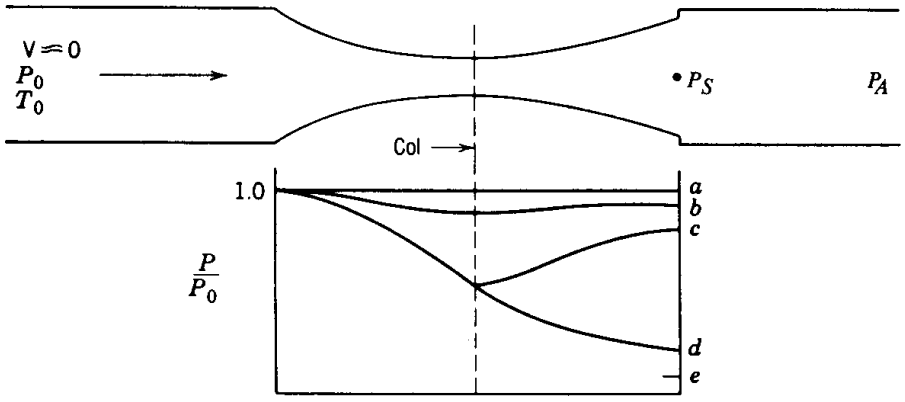


FIG. 14.6 – Ecoulement dans une tuyère de forme donnée

Lorsque la pression est telle que $A_s/A_{\text{col}} = (A/A^*)(M_s)$, l'écoulement est sonique au col (cas c) et subsonique dans le divergent. Si l'on réduit encore la pression, alors il n'y a plus de solution isentropique, sauf pour le cas d correspondant à un écoulement supersonique dans le divergent. On dit alors que la tuyère est *adaptée*. Pour toutes les pressions intermédiaires entre les cas c et d, il y aura donc des phénomènes irréversibles qui interviennent dans ou à l'extérieur de la tuyère.

14.7 Ecoulement unidimensionnel adiabatique avec frottement

14.7.1 Effet du frottement

Dans le cas d'un écoulement avec frottement et sans échange de chaleur (adiabatique) dans une conduite de section constante, les équations du mouvement deviennent.

Conservation de la masse

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho c = \frac{c}{v} = \text{constante} \tag{14.47}$$

Résultante cinétique

$$c\mathrm{d}c + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{c^2}{2}\delta\mathcal{F} = 0 \tag{14.48}$$

Premier principe

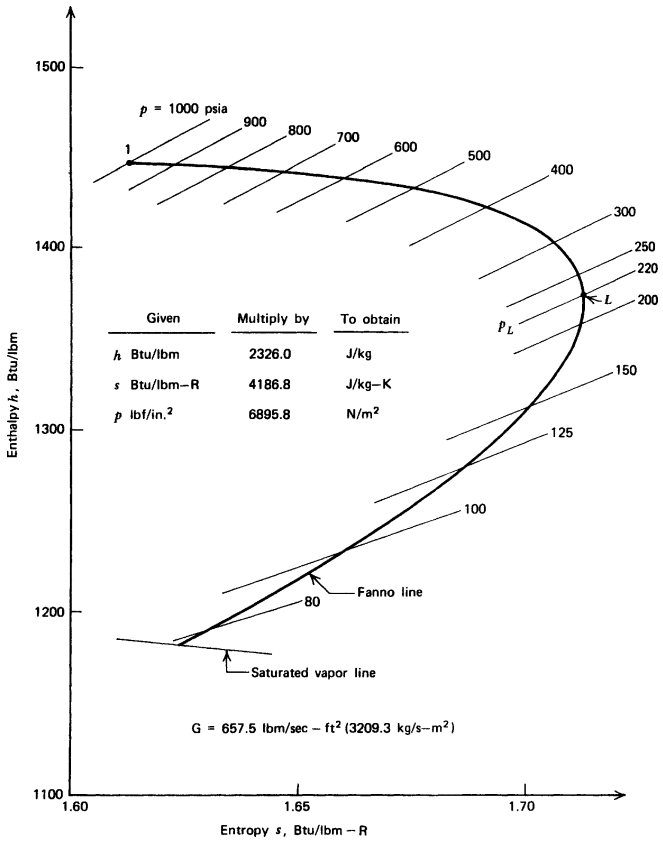
$$\mathrm{d}(h + \frac{c^2}{2}) = \mathrm{d}h^0 = 0 \tag{14.49}$$

Comme $c = Gv$, on peut exprimer l'équation de l'énergie uniquement en fonction de variables thermodynamiques :

$$h + G^2 \frac{v^2}{2} = h^0 \tag{14.50}$$

Cette équation représente une courbe dans l'espace thermodynamique, que l'on appelle *ligne de Fanno*. Elle s'applique au cas général d'un fluide d'équation d'état quelconque. L'effet du frottement n'apparaît pas explicitement, mais se manifeste via son influence sur les propriétés thermodynamiques.

A titre d'illustration, on représente une ligne de Fanno dans un diagramme de Mollier de la vapeur d'eau sur la planche suivante. La forme de la courbe est semblable pour tous les fluides compressibles. Avec un fluide entrant dans l'état 1, le frottement aura pour effet de réduire la pression (perte de charge), ce qui entraîne une diminution de masse volumique et donc une augmentation de vitesse, et par conséquent une diminution d'enthalpie. On constate que l'entropie augmente, ce qui est en accord avec le second principe puisque la transformation est adiabatique.



On constate que la ligne de Fanno présente un maximum d'entropie, indiqué par point L. On en déduit que la pression dans la conduite ne peut descendre sous la valeur p_L et que la vitesse ne peut excéder la valeur c_L atteinte au même point. Comme dans le cas de la tuyère convergente décrit à la section précédente, on observe donc un phénomène de *saturation*, cette fois dé au frottement.
Comme dans le cas de la tuyère convergente, la section ne pouvait pas diminuer sous la section critique, le frottement ne peut excéder une valeur maximum.

FIG. 14.7 – La ligne de Fanno

En effet, en soustrayant l'équation de l'énergie de l'équation de quantité de mouvement, on obtient

$$v\mathrm{d}p - \mathrm{d}h + \frac{c^2}{2}\delta\mathcal{F} = 0 \rightarrow \delta\mathcal{F} = \frac{T\mathrm{d}s}{c^2/2} \rightarrow \mathcal{F} = \int_e^s \frac{T\mathrm{d}s}{c^2/2} \leq \int_e^L \frac{T\mathrm{d}s}{c^2/2}$$

En l'absence d'obstacles dans l'écoulements, $\delta\mathcal{F} = 4\mathfrak{f}\mathrm{d}x/D_h$, et il y a donc une longueur maximum de conduite $L_{\max}$,

$$L_{\max} = \frac{D_h}{4\mathfrak{f}} \int_e^L \frac{T\mathrm{d}s}{c^2/2} = \frac{D_h}{4\mathfrak{f}G^2} \int_e^L \frac{T\mathrm{d}s}{v^2/2} = -\frac{D_h}{2\mathfrak{f}G^2} \int_e^L \left(G^2 \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}p}{v} \right) \tag{14.51}$$

Si la conduite considérée est plus longue que cette longueur limite, cela signifie que les conditions d'entrée ne sont pas réalisables, spécifiquement que le débit est trop élevé.

Examinons de plus près les conditions d'écoulement au point limite L. Comme en ce point $\mathrm{d}s = 0$,

$$\mathrm{d}h = v\mathrm{d}p = va^2\mathrm{d}\rho = -a^2\mathrm{d}v/v$$

Mais par ailleurs $\mathrm{d}h = -G^2 v\mathrm{d}v$, de sorte que

$$G^2 v = a^2/v \rightarrow c^2 = G^2 v^2 = a^2$$

c.-à-d. que l'écoulement est *sonique*, comme à l'extrémité d'une tuyère convergente saturée.

La partie inférieure de la ligne de Fanno correspond à des conditions d'entrée supersoniques. Dans ce cas, le frottement a pour effet (paradoxal) de comprimer le fluide. La raison en est que la perte de charge a pour effet principal de réduire la vitesse, dont il s'ensuit une augmentation de masse volumique (par conservation du débit) et de pression. On constate donc que le frottement a pour effet de faire tendre le nombre de Mach vers l'unité, comme la convergence d'une tuyère.

Remarquons pour terminer que, par un point du plan thermodynamique, il passe *plusieurs* lignes de Fanno correspondant à des débits différents.

14.7.2 Equations de la ligne de Fanno pour les gaz parfaits

Comme à la section précédente, on peut obtenir une solution analytique dans le cas des gaz parfaits. Comme l'enthalpie totale se conserve, on a à nouveau

$$T^0 = T(1 + \frac{k-1}{2}M^2)$$

et en particulier, à l'état critique L que l'on désignera dans ce qui suit par l'indice supérieur * (mais qu'il faut veiller à ne pas confondre avec l'état critique isentropique de la section précédente),

$$T^0 = \frac{k+1}{2}T^* \quad \rightarrow \quad \frac{T}{T^*} = \frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)} \tag{14.52}$$

A partir de l'équation de conservation de la masse, on tire

$$G = \rho c = \rho M a = pM\sqrt{\frac{k}{RT}}$$

d'où

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\left(\frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{14.53}$$

et donc

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{p}{p^*}\frac{T^*}{T} = \frac{1}{M}\left(\frac{k+1}{2(1+\frac{k-1}{2}M^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{14.54}$$

Calculons à présent la longueur maximum. De l'équation de l'énergie $\mathrm{d}h + c\mathrm{d}c = 0$, on a en divisant par h,

$$\frac{\mathrm{d}h}{h} + \frac{c^2}{h}\frac{\mathrm{d}c}{c} = \frac{\mathrm{d}T}{T} + (k-1)M^2\frac{\mathrm{d}c}{c} = 0$$

Mais par ailleurs, par conservation de la masse,

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}c}{c} = 0$$

d'où, en sommant,

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + \left[1 + (k-1)M^2\right]\frac{\mathrm{d}c}{c} = 0$$

De l'équation de quantité de mouvement (14.25)

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + kM^2\frac{\mathrm{d}c}{c} + \frac{kM^2}{2}\delta\mathcal{F} = 0$$

on déduit par conséquent

$$\frac{kM^2}{2}\delta\mathcal{F} = (1-M^2)\frac{\mathrm{d}c}{c}$$

Enfin, comme

$$\frac{\mathrm{d}M}{M} = \frac{\mathrm{d}c}{c} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}T}{T} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)\frac{\mathrm{d}c}{c}$$

on obtient

$$\delta\mathcal{F} = \frac{4\mathfrak{f}\mathrm{d}x}{D_h} = \frac{2(1-M^2)}{kM^2}\frac{1}{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{\mathrm{d}M}{M} = \frac{2(1-M^2)\mathrm{d}M}{kM^3\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)} \tag{14.55}$$

En intégrant entre le point courant et le point critique, on obtient

$$\frac{4\mathfrak{f}L_{\max}}{D_h} = \frac{1-M^2}{kM^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left(\frac{\frac{k+1}{2}M^2}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right) \tag{14.56}$$

Enfin, on peut calculer la variation d'entropie. Comme (voir section 7.10)

$$\frac{\mathrm{d}s}{R} = \frac{1}{k-1}\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{1}{k-1}\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = (1-M^2)\frac{\mathrm{d}c}{c} = \frac{1-M^2}{\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

on obtient en intégrant

$$\frac{s^* - s}{R} = \ln\left\{\frac{1}{M}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\right\} \tag{14.57}$$

14.8 Ecoulement unidimensionnel avec échange de chaleur

14.8.1 Effet de l'échange de chaleur

On considère à présent l'écoulement sans frottement mais avec échange de chaleur dans une conduite de section constante. Les équations du mouvement deviennent dans ce cas

Conservation de la masse

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho c = \frac{c}{v} = \text{constante} \tag{14.58}$$

Résultante cinétique

$$c\mathrm{d}c + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = 0 \tag{14.59}$$

Premier principe

$$\mathrm{d}(h + \frac{c^2}{2}) = \mathrm{d}h^0 \tag{14.60}$$

Comme $c = Gv$, on peut exprimer l'équation de quantité de mouvement uniquement en fonction de variables thermodynamiques

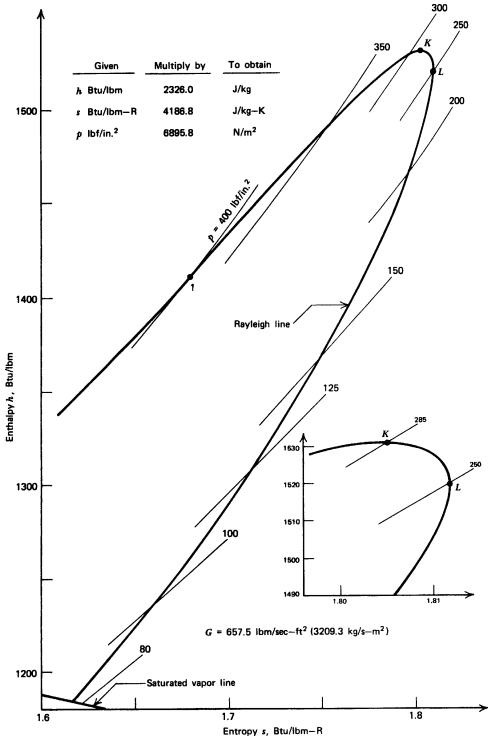
$$\mathrm{d}p + G\mathrm{d}c = \mathrm{d}p + G^2\mathrm{d}v = 0$$

d'où, en intégrant,

$$p + G^2 v = \text{constante} \tag{14.61}$$

Cette équation représente une courbe dans l'espace thermodynamique, que l'on appelle *ligne de Rayleigh*. Elle s'applique au cas général d'un fluide d'équation d'état quelconque. L'effet de l'échange de chaleur n'apparaît pas explicitement, mais se manifeste via son influence sur les propriétés thermodynamiques.

A titre d'illustration, on représente une ligne de Rayleigh dans un diagramme de Mollier de la vapeur d'eau sur la planche suivante. La forme de la courbe est semblable pour tous les fluides compressibles. Dans un diagramme $p - v$, la ligne de Rayleigh est évidemment une ligne droite. Avec un fluide entrant à l'état 1, l'apport de chaleur se traduit par une augmentation d'entropie (puisque la transformation est réversible), qui s'accompagne d'une diminution de pression et de masse volumique, et par conséquent une augmentation de vitesse.



On remarque deux points remarquables sur la ligne de Rayleigh, à savoir un maximum d'enthalpie K et un maximum d'entropie L. Initialement, l'apport de chaleur s'accompagne d'une augmentation d'enthalpie, jusqu'au point K où l'apport de chaleur se transforme intégralement en énergie cinétique. Au-delà de K, l'augmentation d'énergie cinétique est supérieure à l'apport de chaleur, ce qui entraîne la diminution de h.
Quant au point d'entropie maximum, il indique à nouveau un phénomène de saturation. En effet, il en résulte que la quantité de chaleur fournie au fluide est bornée supérieurement par la quantité de chaleur l'amenant à l'état L. On parle dans ce cas de saturation thermique.

FIG. 14.8 – La ligne de Rayleigh

Comme la transformation est réversible, $\delta q = \mathrm{d}h^0 = T\mathrm{d}s$ et donc la quantité maximum de chaleur transférable au fluide vaut

$$q_{\max} = \int_e^L T\mathrm{d}s \tag{14.62}$$

Examinons de plus près les conditions au point limite L. Comme en ce point $\mathrm{d}s = 0$, $\mathrm{d}p = a^2\mathrm{d}\rho$. Mais sur la ligne de Rayleigh $\mathrm{d}p + G^2\mathrm{d}v = 0$. On en déduit

$$a^2 - G^2v^2 = 0 \quad \rightarrow \quad c^2 = G^2v^2 = a^2 \tag{14.63}$$

c.-à-d. qu'une nouvelle fois, l'écoulement est sonique.

Dans la partie supérieure de la ligne de Rayleigh, qui correspond à un écoulement subsonique, l'apport de chaleur a pour effet d'accélérer l'écoulement vers des conditions soniques. Au contraire, dans la partie inférieure de la ligne de Rayleigh, qui correspond à un écoulement supersonique, l'apport de chaleur a pour effet de décélérer l'écoulement vers des conditions soniques. Il a donc le même effet qu'une diminution de section.

14.8.2 Equations de la ligne de Rayleigh pour les gaz parfaits

Dans le cas des gaz parfaits, on peut à nouveau obtenir une solution analytique pour l'évolution des variables thermodynamiques sur une ligne de Rayleigh. On part cette fois de l'équation de la quantité de mouvement $p + Gc = p + \rho c^2 =$ constante. On en déduit

$$p + \rho c^2 = p + M^2\rho a^2 = p(1 + kM^2) = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1+k}{1+kM^2} \tag{14.64}$$

en notant par l'indice supérieur * les conditions critiques à l'état L.

Par ailleurs, l'équation de conservation de la masse $\rho c =$ constante permet de déduire

$$\rho c = \frac{p}{RT} M\sqrt{kRT} = pM\sqrt{\frac{k}{RT}} = \text{constante} \quad \rightarrow \quad \frac{T}{T^*} = M^2 \left(\frac{1+k}{1+kM^2}\right)^2 \tag{14.65}$$

En divisant, on déduit immédiatement

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1+kM^2}{M^2(1+k)} \tag{14.66}$$

De la définition de la température totale, on tire l'expression de la variation de température totale

$$T^0 = T(1+\frac{k-1}{2}M^2) \quad \rightarrow \quad \frac{T^0}{T^{0*}} = \frac{2M^2(k+1)(1+\frac{k-1}{2}M^2)}{(1+kM^2)^2} \tag{14.67}$$

qui passe effectivement par un maximum pour $M = 1$.

Enfin, on peut calculer la variation d'entropie. Comme (section 7.10)

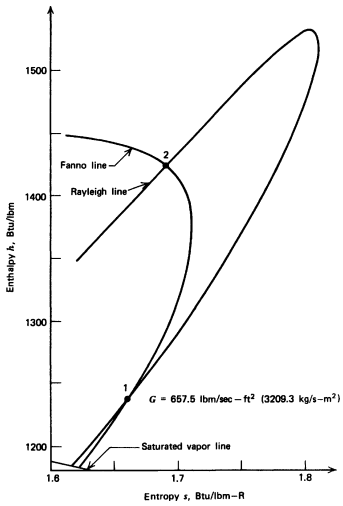
$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

on obtient

$$\frac{s^* - s}{R} = \frac{k}{k-1} \ln \frac{T}{T^*} - \ln \frac{p}{p^*} = \frac{k}{k-1} \ln \left\{ M^2 \left(\frac{kM}{1+kM^2}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right\} \tag{14.68}$$

14.9 Ondes de choc normales

14.9.1 Intersections d'une ligne de Fanno et d'une ligne de Rayleigh



Si l'on porte sur le même diagramme de Mollier une ligne de Fanno et une ligne de Rayleigh correspondant à la même valeur du flux massique $G = \rho c$, on constate qu'elles s'intersectent en deux points, l'un correspondant à un écoulement supersonique et l'autre à un écoulement subsonique. On en conclut qu'un passage spontané de l'état 1 à l'état 2, sans échange de chaleur et sans frottement, est possible.
Un tel changement brusque (discontinuité) est une *onde de choc*. On constate qu'il s'agit d'une onde de compression puisque $p_2 > p_1$. Corollairement, la vitesse diminue.

FIG. 14.9 – Intersections d'une ligne de Fanno et d'une ligne de Rayleigh

Il faut remarquer que le saut de l'état 1 à l'état 2 est possible parce qu'il respecte le second principe ($s_2 > s_1$) alors qu'au contraire le saut de l'état 2 à l'état 1 est impossible. Comme $s_2 > s_1$ alors que la transformation est adiabatique, on en conclut qu'une onde de choc est un phénomène irréversible.

14.9.2 Conditions de saut : relations de Rankine-Hugoniot

Les relations entre l'état 1 et l'état 2, appelées conditions de saut ou relations de Rankine-Hugoniot, s'obtiennent à partir des équations de base des systèmes ouverts.

Conservation de la masse

$$\dot{m}_2 - \dot{m}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \rho_2 c_2 = \rho_1 c_1 \tag{14.69}$$

Résultante cinétique

$$\dot{m}_2 c_2 - \dot{m}_1 c_1 = (p_1 - p_2)A \quad \rightarrow \quad p_2 + \rho_2 c_2^2 = p_1 + \rho_1 c_1^2 \tag{14.70}$$

Premier principe

$$m_2(h_2 + \frac{c_2^2}{2}) - \dot{m}_1(h_1 + \frac{c_1^2}{2}) = 0 \quad \rightarrow \quad h_2 + \frac{c_2^2}{2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2} \tag{14.71}$$

Pour des conditions à l'état 1 données, ces trois équations, accompagnées de l'équation d'état $h = h(p, \rho)$, forment un système de 4 équations à 4 inconnues p_2, ρ_2, h_2 et c_2. Comme aucune hypothèse n'a été faite sur l'équation d'état, elles sont applicables à un fluide quelconque.

En éliminant c_2 ou c_1 entre les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement, on obtient

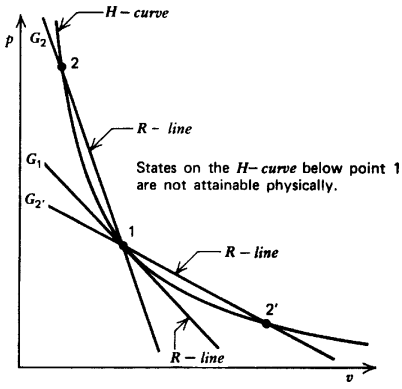
$$c_1^2 = \frac{(p_2 - p_1)\rho_2}{(\rho_2 - \rho_1)\rho_1} = \frac{v_1^2(p_2 - p_1)}{(v_1 - v_2)} \qquad c_2^2 = \frac{(p_2 - p_1)\rho_1}{(\rho_2 - \rho_1)\rho_2} = \frac{v_2^2(p_2 - p_1)}{(v_1 - v_2)}$$

Insérant ces expressions dans l'équation de l'énergie, on obtient

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}\frac{(v_1^2 - v_2^2)(p_2 - p_1)}{(v_1 - v_2)} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(p_2 - p_1) \quad \Leftrightarrow \quad u_2 - u_1 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)(p_2 + p_1) \tag{14.72}$$

Cette équation représente une courbe dans l'espace thermodynamique, lieu de tous les états 2 pouvant être obtenus à partir d'un état 1 donné par une onde de choc normale. Elle est connue sous le nom de *courbe de Hugoniot*.

On peut obtenir graphiquement la solution des conditions de saut en déterminant l'intersection de la courbe de Hugoniot avec une ligne de Rayleigh (ou une ligne de Fanno). Comme l'équation de la ligne de Rayleigh est $p + G^2 v =$ constante (14.61), il s'agit d'une droite dans le plan $p - v$, et il est donc avantageux d'utiliser ce plan.



Considérons plusieurs lignes de Rayleigh passant par l'état initial 1. La ligne G_1 tangente à la ligne de Rayleigh sépare les lignes de pente plus élevée telles que G_2 qui intersectent la courbe de Hugoniot en un point de pression plus élevée, et les lignes de pente plus faible telles que G_2' qui l'intersectent en un point de pression plus faible. Comme on l'a observé précédemment, seules les premières transformations sont possibles.

FIG. 14.10 – Courbe de Hugoniot

Le cas de la ligne G_1 marquant la frontière entre les branches supérieure et inférieure de la courbe de Hugoniot mérite une attention particulière. Par la définition même

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\right)_H = -G_1^2 = -\rho_1^2 c_1^2$$

Mais par ailleurs, $(\mathrm{d}s)_H = 0$ au point 1. En effet, par l'équation de la courbe de Hugoniot,

$$\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}v}\right)_H = \frac{1}{2}(p - p_1) + \frac{1}{2}(v_1 + v)\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\right)_H$$

En utilisant la relation de Gibbs $\mathrm{d}h = T\mathrm{d}s + v\mathrm{d}p$, on déduit donc

$$2T\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}\right)_H = (p - p_1) + (v_1 - v)\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\right)_H = (v_1 - v)\left[G^2 + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\right)_H\right]$$

Or précisément, dans le cas de la ligne G_1, les deux facteurs du membre de droite sont tous les deux nuls. Par conséquent,

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\right)_H = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -\rho_1^2 a_1^2$$

et donc $c_1 = a_1$, c.-à-d. que la ligne G_1 correspond à des conditions soniques en 1. La branche supérieure, admissible, de la courbe de Hugoniot correspond à des conditions supersoniques en 1 et donc, une onde de choc ne peut survenir que dans les écoulements supersoniques.

14.9.3 Relations de Rankine-Hugoniot pour les gaz parfaits

Pour les gaz parfaits, on peut facilement éliminer l'enthalpie des conditions de saut puisque $h = (k/k-1)(p/\rho)$. Il reste donc

$$\rho_2 c_2 = \rho_1 c_1 \tag{14.73}$$

$$p_2 + \rho_2 c_2^2 = p_1 + \rho_1 c_1^2 \tag{14.74}$$

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{c_2^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_1^2}{2} \tag{14.75}$$

Il est avantageux de donner une forme adimensionnelle à ce système. En divisant la première équation par $\sqrt{k\rho_1 p_1}$, la deuxième par p_1 et la dernière par kp_1/ρ_1 et en introduisant les

rapports de pression $\Pi = p_2/p_1$ et de masse volumique $\sigma = \rho_2/\rho_1$, on obtient

$$\sqrt{\sigma\Pi}M_2 = M_1 \tag{14.76}$$
$$\Pi(1 + kM_2^2) = 1 + kM_1^2 \tag{14.77}$$
$$\frac{\Pi}{\sigma}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{M_2^2}{2}\right) = \frac{1}{k-1} + \frac{M_1^2}{2} \tag{14.78}$$

qui constitue un système algébrique non-linéaire pour Π, σ et M_2, dont la solution ne dépend que du nombre de Mach M_1 de l'écoulement initial. Il se trouve que, par chance, ce système possède une solution analytique.

On commence par résoudre la première équation pour M_2

$$M_2^2 = \frac{M_1^2}{\sigma\Pi}$$

En insérant dans la deuxième, on obtient

$$\Pi + \frac{kM_1^2}{\sigma} = 1 + kM_1^2$$

qui permet d'exprimer Π en fonction de σ. On tire alors de la troisième équation

$$\frac{\Pi}{\sigma} + \frac{k-1}{2}\frac{M_1^2}{\sigma^2} = 1 + \frac{k-1}{2}M_1^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1 + kM_1^2}{\sigma} - \frac{kM_1^2}{\sigma^2} + \frac{k-1}{2}\frac{M_1^2}{\sigma^2} = 1 + \frac{k-1}{2}M_1^2$$

ou, en multipliant par σ^2

$$(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2)\sigma^2 - (1 + kM_1^2)\sigma + \frac{k+1}{2}M_1^2 = 0$$

On a donc finalement une équation du second degré pour σ, dont une des racines est la racine évidente $\sigma = 1$. On peut donc factoriser le trinôme précédent

$$(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2)\sigma^2 - (1 + kM_1^2)\sigma + \frac{k+1}{2}M_1^2 = (\sigma - 1)((1 + \frac{k-1}{2}M_1^2)\sigma - \frac{k+1}{2}M_1^2) = 0$$

de sorte que

$$\sigma = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{2}\frac{M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2}M_1^2} = \frac{(k+1)M_1^2}{2 + (k-1)M_1^2} \tag{14.79}$$

En injectant ce résultat dans l'expression du rapport de pression Π, on obtient

$$\Pi = \frac{p_2}{p_1} = 1 + kM_1^2 - \frac{k}{k+1}(2 + (k-1)M_1^2) = \frac{2kM_1^2 - (k-1)}{k+1} \tag{14.80}$$

Enfin, il ne reste plus qu'à injecter ces deux expressions dans l'expression de M_2 et l'on trouve

$$M_2^2 = \frac{M_1^2}{\sigma\Pi} = \frac{2 + (k-1)M_1^2}{2kM_1^2 - (k-1)} \tag{14.81}$$

Ces relations sont tabulées pour le cas d'un gaz diatomique (k=1,4) dans le livre de Van Wylen et al.

Il est également intéressant de calculer la variation d'entropie à travers le choc. A partir de la relation (voir section 7.10)

$$\frac{\mathrm{d}s}{R} = \frac{k}{k-1}\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{1}{k-1}\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{1}{k-1}\left(\frac{\mathrm{d}p}{p} - k\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right)$$

on obtient en intégrant

$$(k-1)\frac{\Delta s}{R} = \frac{\Delta s}{c_v} = \ln\Pi - k\ln\sigma \tag{14.82}$$

et l'on vérifie, en portant cette fonction en graphique en fonction de M_1 que $\Delta s > 0$ lorsque $M_1 > 1$. Examinons en particulier le comportement de cette fonction au voisinage de l'unité. En posant $M_1^2 = 1 + \varepsilon$, on a

$$\sigma = \frac{(k+1)(1+\varepsilon)}{(k+1)+(k-1)\varepsilon} = \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{k-1}{k+1}\varepsilon} \qquad \Pi = \frac{(k+1)+2k\varepsilon}{k+1} = 1 + \frac{2k}{k+1}\varepsilon$$

et donc

$$\frac{\Delta s}{c_v} = \ln(1+\frac{2k}{k+1}\varepsilon) - k\ln(1+\varepsilon) + k\ln(1+\frac{k-1}{k+1}\varepsilon)$$

Développant en série de Mac Laurin, on obtient

$$\frac{\Delta s}{c_v} = \frac{2k(k^2-1)}{3(k+1)^3}\varepsilon^3 + \ldots = \frac{2k(k-1)}{3(k+1)^2}\varepsilon^3 + \ldots \tag{14.83}$$

On constate donc que l'accroissement d'entropie est proportionnel au cube de $(M_1^2 - 1)$ pour M_1 au voisinage de l'unité. Il est donc très faible lorsque M_1 s'écarte peu de l'unité.

La variation d'entropie peut encore s'exprimer en termes de la variation de la pression d'arrêt, une grandeur plus directement mesurable. Comme par définition $s^0 = s$,

$$\Delta s = s_2^0 - s_1^0 = -R\ln\left(\frac{p_2^0}{p_1^0}\right) \tag{14.84}$$

puisque $T_2^0 = T_1^0$. Un accroissement d'entropie implique donc une *chute de la pression d'arrêt*. Ceci explique que la chute de pression d'arrêt soit utilisée comme indicateur de pertes dans certaines applications, notamment les turbomachines.

14.9.4 Ecoulement avec choc dans une tuyère de Laval

On a conclu la section 14.6 en remarquant qu'il n'existe pas de solution isentropique dans une tuyère de Laval pour une pression aval comprise entre les solutions subsonique et supersonique saturées c et d. A la lumière de la connaissance des ondes de choc normales, on peut à présent en dire un peu plus.

Supposons qu'une onde de choc normale survienne dans le divergent en un endroit donné. Les relations de Rankine-Hugoniot permettent de calculer les conditions derrière le choc, en particulier la pression et le nombre de Mach. L'écoulement étant subsonique derrière le choc, il décélère dans le reste du divergent, et l'on peut calculer son évolution par la théorie des écoulements isentropiques en tuyère. On constate que la pression de sortie est inférieure à celle du cas c (cas h).

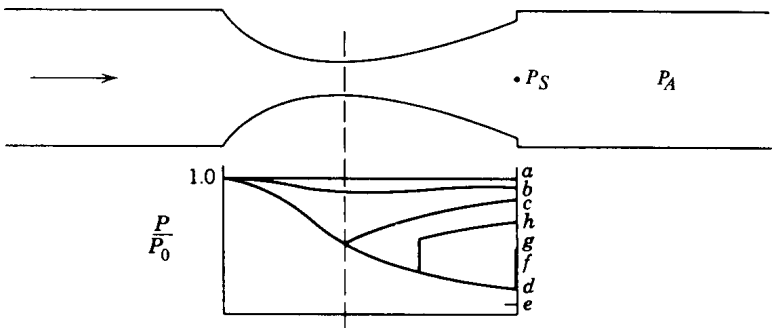


FIG. 14.11 – Ecoulement avec choc dans une tuyère de Laval

En effet, si la transformation à travers le choc était isentropique, la pression derrière le choc serait identique à celle de la courbe c. Comme il y a une chute de pression d'arrêt à travers le choc, la pression derrière le choc est inférieure, et par conséquent toute la distribution de pression en aval est sous celle du cas c.

Comme la chute de pression totale augmente avec le nombre de Mach M_1 en amont du choc, il en résulte que la pression de sortie diminue à mesure que le choc se déplace vers la sortie de la tuyère. Pour une pression de sortie donnée, la position du choc n'est pas connue a priori. On doit la déterminer par itérations. Le cas extrême est celui ou le choc se trouve dans la section de sortie, qui correspond au cas g de la figure précédente.

On peut donc calculer à présent l'écoulement en tuyère pour des pressions aval comprises entre les cas a et g. Pour une pression inférieure à celle du cas g, l'augmentation de pression entre la pression adaptée p_d et la pression aval ne peut se produire qu'à l'extérieur de la tuyère, au moyen d'ondes de choc obliques, analysées dans le cours MECA 339 Dynamique des gaz. En pratique, on observe que les ondes de choc obliques remontent dans la tuyère pour des pressions légèrement au-delà de la pression p_g.

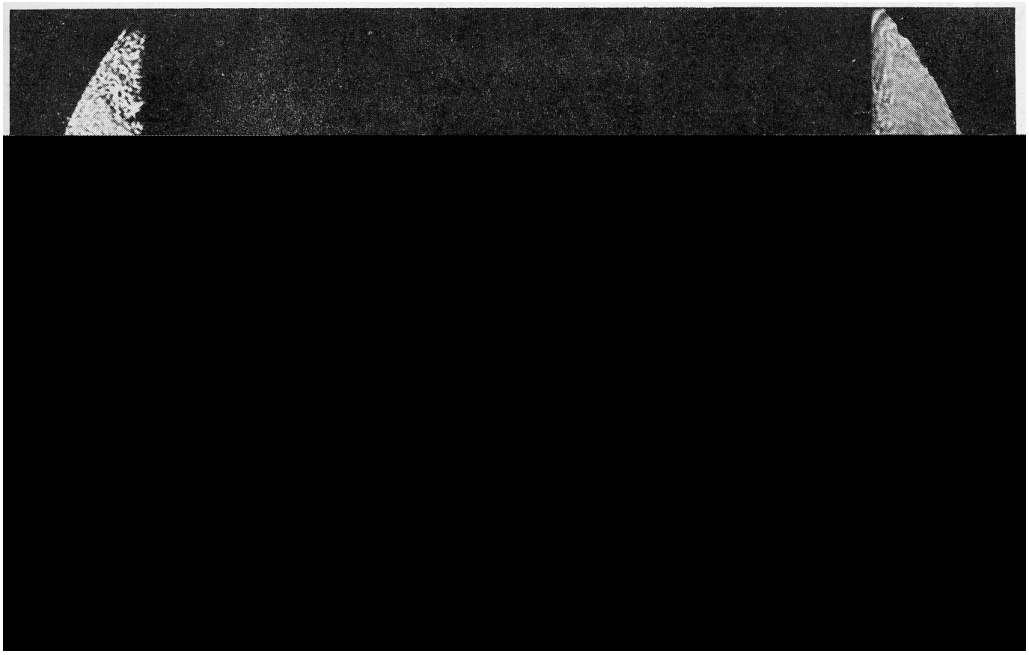


FIG. 14.12 – Ondes de choc obliques dans la tuyère

Chapitre 15

Notions sur les turbomachines

Au cours des chapitres précédents, on a maintes fois considéré des machines au sein desquelles s'opérait un échange de travail avec le milieu extérieur (compresseurs, turbines). Parmi celles-ci, on a identifié deux grandes familles :

Machines volumétriques Dans ce type de machines, on fait subir au fluide actif une évolution temporelle au sein d'un système fermé, et l'échange de travail se fait par action des contraintes de pression sur une frontière mobile du système. L'exemple le plus emblématique et le plus répandu est celui des dispositifs à cylindres et pistons, mais il en existe d'autres (p. ex. les capsulismes, comme le moteur rotatif Wankel).

Machines à circulation de fluide Dans ce type de machines, le fluide subit une évolution spatiale au sein d'un système ouvert, mais la manière précise dont le travail est échangé n'a pas été discutée. On a simplement mentionné qu'il est généralement transmis à un arbre en rotation. La très grande majorité, pour ne pas dire la totalité, des machines de cette catégorie sont des *turbomachines*. Ce chapitre constitue une brève introduction à l'étude de ces machines, qui se bornera à en faire une description générale et à en expliquer le principe fondamental de fonctionnement.

15.1 Définition des turbomachines

On appelle turbomachine un ensemble mécanique de révolution comportant une ou plusieurs roues (rotors) mobiles munies d'aubes (aubages, ailettes) qui ménagent entre elles des canaux à travers lesquels le fluide s'écoule.

L'échange d'énergie s'effectue dans le rotor et résulte du travail des forces aérodynamiques sur les aubes produites par l'écoulement du fluide autour de celles-ci, et qui résultent principalement de la différence de pression entre les deux faces des aubes. Remarquons que, bien que le travail soit produit cette fois encore par les contraintes de pression, il se fait sans déformation de la frontière du système comme pour les machines volumétriques, mais simplement par rotation des aubes.

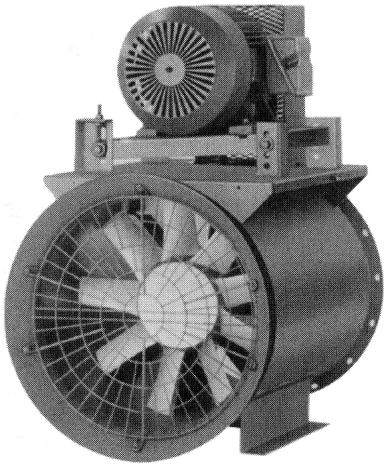
Il existe une très grande variété de turbomachines. Aussi, avant d'en examiner plus avant le principe de fonctionnement, il est utile d'en faire une classification selon divers critères et de l'illustrer par des exemples concrets.

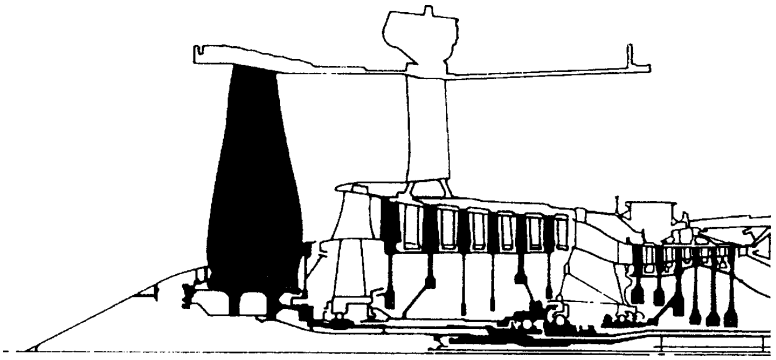
15.2 Classification des turbomachines

De nombreux critères servent à classer les turbomachines. Les plus importants sont les suivants :

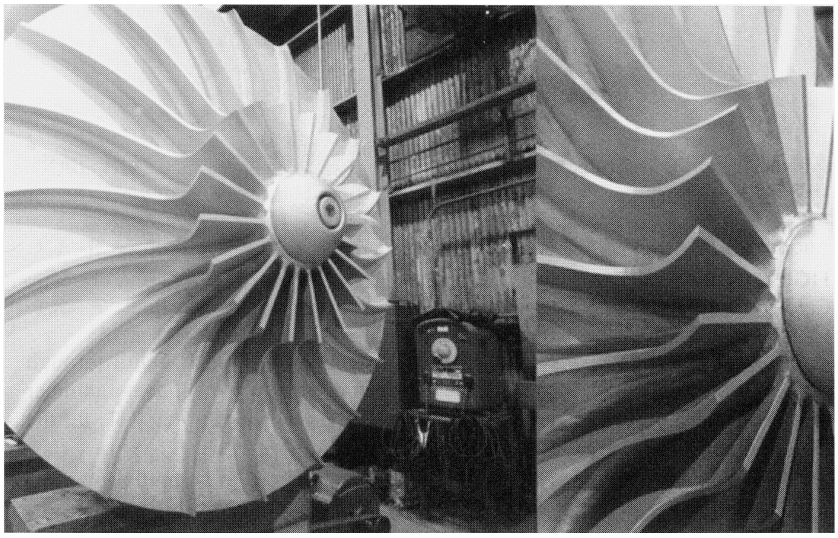
Sens de l'échange d'énergie On distingue les machines réceptrices qui reçoivent du travail et les machines motrices qui en fournissent. Parmis les machines réceptrices, on trouve les *turbopompes*, les *ventilateurs*, les *turbosoufflantes*, les *turbocompresseurs* et les *hélices* aériennes et marines. Les principales machines motrices sont les *turbines à vapeur* et *à gaz*, les *turbines hydrauliques*, ainsi que les *éoliennes*. Ces deux classes de machines présentent des différences importantes du point de vue de leur conception aérodynamique. En effet, les machines réceptrices sont le siège d'une compression (élévation de pression) du fluide, alors que les machines motrices font intervenir une détente. Or, les pertes visqueuses dans les écoulements fluides sont très sensibles au gradient de pression et augmentent fortement lorsque celui-ci devient trop important, en raison du phénomène de *décrochage*.

Direction principale du tube de courant Dans certaines machines, le tube de courant traversant la machine est essentiellement parallèle à l'axe de la machine, et on les appelle donc des *machines axiales*. Les hélices aériennes et marines appartiennent à cette catégorie, mais aussi certains ventilateurs, ainsi que les compresseurs et turbines axiaux des turboréacteurs, et les turbines hydrauliques de type Kaplan. Dans de nombreux cas, en particulier dans les turboréacteurs, les machines axiales comportent plusieurs *étages*.





Dans d'autres machines au contraire, le tube de courant traversant la machine est essentiellement perpendiculaire à l'axe, et la machine est dite *radiale* (centrifuge ou centripète). Pour des raisons que l'on discutera plus loin, on peut échanger une plus grande quantité d'énergie dans un étage radial que dans un étage axial, de sorte que, pour une application donnée, une machine radiale comporte moins d'étages que la machine axiale équivalente.



Bien évidemment, au voisinage de l'axe, l'écoulement doit prendre une direction axiale. Il existe également des configurations intermédiaires, dites *mixtes*, dans lesquelles l'écoulement a des composantes tant axiale que radiale. C'est le cas par exemple des *turbines hydrauliques de type Francis*. Dans certaines machines enfin, l'écoulement est tangentiel, c.-à-d. que les particules fluides se déplacent dans un plan parallèle à l'axe de la roue.

Outre ces deux catégories principales, on distingue également
- les machines hydrauliques (à écoulements incompressibles) et les machines à écoulements compressibles ;
- les machines à action, dans lesquelles la pression reste constante à travers le rotor, et les machines à réaction dans lesquelles elle varie : on reviendra sur cette distinction plus avant ;
- les machines à admission totale, dans lesquelles le rotor est alimenté sur la totalité de sa surface d'entrée, et les machines à admission partielle où seule une partie du rotor est alimentée. C'est toujours le cas des turbines hydrauliques de type Pelton, et pour certaines turbines à vapeur pour lesquelles l'admission partielle est utilisée pour le réglage du débit. L'admission partielle est réservée aux machines à action.

15.3 Constitution des turbomachines

Une turbomachine ne comportant qu'un seul rotor est dite à simple étage ou encore monocellulaire. Les machines comportant plusieurs étages sont également appelées multicellulaires.

Une machine monocellulaire complète se compose de trois organes distincts que le fluide traverse successivement :

Le distributeur dont le rôle est de conduire le fluide depuis la section d'entrée de la machine [identifiée par l'indice 0] à la section d'entrée du rotor [identifiée par l'indice 1] en lui donnant une vitesse et une direction appropriées. Le distributeur peut être une simple canalisation ou comprendre une couronne d'aubes fixes (stator, indispensable s'il faut

dévier l'écoulement tangentiellement), appelées en anglais « Inlet Guide Vanes (IGV) ». Ces aubes sont parfois orientables afin de régler le débit.

Le rotor au sein duquel s'effectue l'échange d'énergie par travail des forces aérodynamiques sur les aubes en rotation.

Le diffuseur dont le rôle est de collecter le fluide à la sortie du rotor [identifiée par l'indice 2] et l'amener à la section de sortie de la machine [identifiée par l'indice 3]. Comme pour le distributeur, le diffuseur peut inclure une (voire deux) couronnes d'aubes fixes. Ces aubes fixes sont notamment utiles lorsque l'écoulement a une composante tangentielle de vitesse à la sortie du rotor et servent à ramener l'écoulement dans la direction principale du tube de courant (axiale ou radiale), raison pour laquelle on utilise parfois le terme redresseur.

Le distributeur et le diffuseur ne sont pas toujours présents, ou sont parfois réduits à un tronçon de canalisation. C'est notamment le cas pour les hélices et éoliennes. Dans les machines multicellulaires, chaque étage ne comprend généralement que deux éléments, à savoir un distributeur et un rotor pour les turbines, et un rotor et un diffuseur pour les pompes et compresseurs, pour des raisons qui apparaîtront clairement par la suite.

15.4 Cinématique de l'écoulement rotorique — triangle des vitesses

Pour analyser l'écoulement dans un rotor de turbomachine, il est commode d'exprimer la vitesse tantôt dans un repère lié aux parties fixes de la machine (distributeur, diffuseur, stator) appelée *vitesse absolue* et notée $\vec{c}$, tantôt dans un repère lié aux parties tournantes de la machine (axe, roue) appelée *vitesse relative* et notée $\vec{w}$. La relation entre ces vitesses est simplement

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u} \tag{15.1}$$

où $\vec{u}$ est la *vitesse d'entraînement* correspondant au mouvement du repère tournant. S'agissant d'un mouvement de rotation pure, la vitesse d'entraînement vaut simplement

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{x} \tag{15.2}$$

ou, en exprimant le vecteur position $\vec{x}$ dans un système de coordonnées cylindriques $\vec{x} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$, et comme $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$,

$$\vec{u} = \omega r \vec{e}_\theta \tag{15.3}$$

c.-à-d. que la vitesse d'entraînement est *purement tangentielle*.

Les vitesses absolue, relative et d'entraînement étant dans un même plan, on les visualise aisément à l'aide d'un diagramme vectoriel dans ce plan, auquel on donne le nom de *triangle des vitesses*.

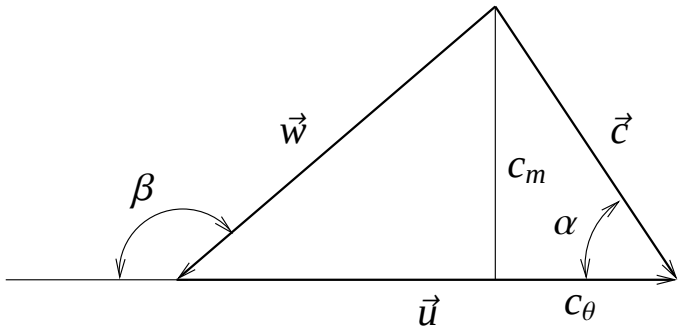


FIG. 15.1 – diagramme vectoriel dans ce plan : *triangle des vitesses*

On note respectivement α et β les angles entre le vecteur vitesse absolue (resp. relative) et le vecteur vitesse d'entraînement.

15.5 Mécanisme de l'échange d'énergie dans un rotor de turbomachine — Théorème du moment cinétique

Une forme dérivée de la 2$^{\text{e}}$loi de Newton est le *théorème du moment cinétique* qui, pour un système fermé, s'exprime comme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}_F}{\mathrm{d}t} = \vec{C}_V + \vec{C}_S \tag{15.4}$$

où $\vec{C}_V$ et $\vec{C}_S$ sont les couples des forces de volume et de surface respectivement.

La généralisation aux systèmes ouverts s'obtient de la même manière que pour les premier et second principe (voir sections 5.10 et 7.12). La taux de variation du moment cinétique du système fermé constitué de la matière initialement contenue dans le système ouvert considéré est relié à celui du système ouvert par

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{M}_F}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{M}_O}{\mathrm{d}t} + \oint_S \rho(\vec{x}\times\vec{c})(\vec{c}-\vec{b}_O)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{M}_O}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s(\vec{x}\times\vec{c})_s - \sum \dot{m}_e(\vec{x}\times\vec{c})_e \end{aligned} \tag{15.5}$$

puisque la quantité de mouvement massique n'est rien d'autre que le moment du vecteur vitesse $\vec{x}\times\vec{c}$. Et par ailleurs, les couples s'appliquant sur le système ouvert sont identiques à ceux s'appliquant sur le système fermé au moment initial où ils coïncident.

Dans le cas d'une turbomachine, seule la composante axiale du théorème du moment cinétique nous intéresse. Le moment cinétique par unité de masse d'une particule (fluide ou solide) valant

$$\begin{aligned}\vec{x}\times\vec{c} &= (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z)\times(c_r\vec{e}_r + c_\theta\vec{e}_\theta + c_z\vec{e}_z) \\ &= -zc_\theta\vec{e}_r + (zc_r - rc_z)\vec{e}_\theta + rc_\theta\vec{e}_z\end{aligned}$$

la composante axiale vaut donc rc_θ.

La composante axiale du théorème du moment cinétique s'écrit donc

$$\frac{\mathrm{d}M_{O,z}}{\mathrm{d}t} + \sum \dot{m}_s(rc_\theta)_s - \sum \dot{m}_e(rc_\theta)_e = C_{V,z} + C_{S,z} \tag{15.6}$$

Appliquons ce théorème à un rotor de turbomachine tel que schématisé ci-dessous.

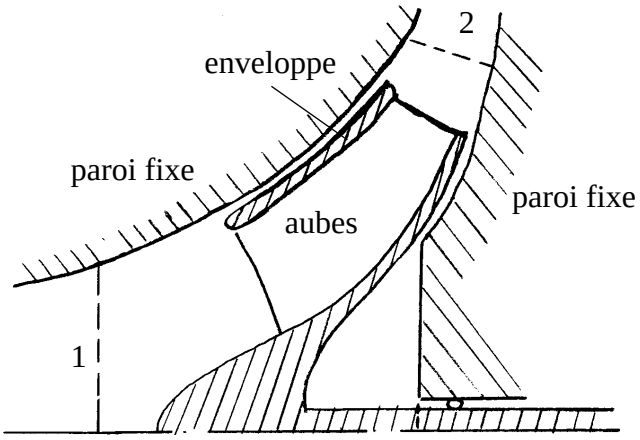


Fig. 15.2 – Rotor de turbomachine

On considère le système formé de la roue et du fluide entre les sections 1 et 2, supposé en régime permanent. Les frontières du système sont donc la section d'entrée 1, la paroi fixe avant, la section de sortie 2, la paroi fixe arrière, et une coupe dans l'arbre d'entraînement de la roue dans l'alignement de la paroi fixe arrière. Notons par ailleurs que la roue ne possède pas toujours une enveloppe, on parle alors de roue semi-ouverte.

D'abord, observons que la force de gravité n'exerce aucun couple axial, soit que l'axe soit vertical, soit en raison de la symétrie de révolution du système. L'équation de la composante

axiale du moment cinétique (15.6) s'écrit donc (comme il s'agit d'un système à une seule entrée et une seule sortie)

$$\dot{m}(r_2 c_{\theta 2} - r_1 c_{\theta 1}) = C_A + C_1 + C_2 + C_p$$

où C_A est le couple à l'arbre et C_1, C_2 et C_p les couples des forces de surfaces sur les sections 1 et 2, et sur les parois fixes.

Remarquons que les forces de pression sur les sections 1 et 2 et sur les parois ne produisent aucun couple axial. Donc, seules les contraintes de cisaillement visqueuses contribuent aux couples de surface, et, comme celles-ci sont les plus élevées au voisinage des parois solides, l'essentiel du couple des forces de surface est celui exercé par les parois (qui est nécessairement dans le sens opposé à la vitesse de rotation). Il est toujours très faible par rapport au couple à l'arbre et peut par conséquent être négligé. On obtient donc finalement

$$C_A = \dot{m}(r_2 c_{\theta 2} - r_1 c_{\theta 1}) \tag{15.7}$$

formule fondamentale des turbomachines, connue sous le nom de *formule d'Euler* pour le couple. Remarquons que cette formule s'applique également aux organes fixes (stators distributeurs ou diffuseurs).

En multipliant la formule d'Euler par la vitesse de rotation de l'arbre ω (pour un rotor, la vitesse de rotation étant bien entendu nulle pour un stator), on obtient la formule de la puissance

$$\dot{W} = \omega C_A = \dot{m}(u_2 c_{\theta 2} - u_1 c_{\theta 1}) \tag{15.8}$$

Pour une machine réceptrice, le couple à l'arbre est dans le même sens que la vitesse de rotation, et donc $\dot{W} > 0$. Inversément, pour une machine motrice, le couple à l'arbre est dans le sens opposé à la vitesse de rotation, et $\dot{W} < 0$.

En divisant cette dernière relation par le débit massique, on obtient l'expression du travail massique

$$w = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = u_2 c_{\theta 2} - u_1 c_{\theta 1} \tag{15.9}$$

On peut donner une forme alternative de cette expression en utilisant la relation cinématique $\vec{w} = \vec{c} - \vec{u}$, dont on déduit

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{u} \qquad \rightarrow \qquad \vec{c}\cdot\vec{u} = c_\theta u = \frac{c^2 + u^2 - w^2}{2}$$

de sorte que

$$w = \frac{(c_2^2 - c_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) - (w_2^2 - w_1^2)}{2} \tag{15.10}$$

On décompose alors l'énergie échangée en deux contributions, à savoir la variation d'énergie cinétique $(c_2^2 - c_1^2)/2$ que l'on appelle *énergie d'action* et la variation de $(u^2 - w^2)/2$ appelée *énergie de réaction*. Le degré de réaction R est alors défini comme le rapport entre l'énergie de réaction et l'énergie totale échangée.

$$R \equiv \frac{(u_2^2 - u_1^2) - (w_2^2 - w_1^2)}{(c_2^2 - c_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) - (w_2^2 - w_1^2)}$$

15.6 Application du premier principe à un rotor de turbomachine

Appliquons à présent le premier principe au système considéré précédemment. En supposant l'absence d'échange de chaleur avec l'extérieur ($q = 0$) et en négligeant les variations d'énergie potentielle, on a

$$w = (h_2 - h_1) + \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2} \tag{15.11}$$

Soustrayant de cette expression l'expression alternative du travail massique (15.10), on obtient

$$(h_2 - h_1) + \frac{(w_2^2 - w_1^2) - (u_2^2 - u_1^2)}{2} = 0 \tag{15.12}$$

qui exprime la conservation de la grandeur $h + (w^2 - u^2)/2$, à laquelle on donne le nom de *rothalpie*, le long des canaux inter-aubes rotoriques.

Alors que pour une conduite fixe en l'absence d'échange de chaleur, on a

$$h + \frac{c^2}{2} = \text{const.}$$

(voir chapitre 14), l'expression devient

$$h + \frac{w^2 - u^2}{2} = \text{const.}$$

pour une conduite en rotation telle qu'un canal inter-aubes rotoriques[1].

On déduit de l'équation (15.12) la formule de Bernoulli pour un écoulement permanent en repère relatif. En effet, par la relation de Gibbs $\mathrm{d}h = v\mathrm{d}p + T\mathrm{d}s$, on a

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 v\mathrm{d}p + \int_1^2 T\mathrm{d}s = \int_1^2 v\mathrm{d}p + e_{f_{12}}$$

puisque, en l'absence d'échange de chaleur, $T\mathrm{d}s = T\mathrm{d}s_i$ est l'énergie perdue par frottements visqueux ($\mathrm{d}e_f$), de sorte que

$$\int_1^2 v\mathrm{d}p + \frac{(w_2^2 - w_1^2) - (u_2^2 - u_1^2)}{2} + e_{f_{12}} = 0 \tag{15.13}$$

On voit donc que (aux pertes près), la variation d'énergie de pression dans le rotor est égale à l'énergie de réaction, qui se compose de deux contributions :

- la variation de l'énergie cinétique d'entraînement $u^2/2$, qui résulte du travail de la réaction d'entraînement. C'est la contribution principale pour les machines radiales.
- l'opposée de la variation de l'énergie cinétique relative $w^2/2$ qui résulte du travail de la réaction d'inertie. C'est la seule contribution pour les machines axiales (puisque pour ces dernières, le tube de courant étant parallèle à l'axe, $r_2 = r_1$). C'est ce qui explique pourquoi, toutes autres choses étant égales par ailleurs, on peut échanger plus d'énergie dans un étage radial que dans un étage axial.

[1] Il faut toutefois souligner que cette expression n'est valide que pour un écoulement permanent, ce qu'on a supposé ici.

Enfin, on constate que pour une machine axiale à action pure idéale (sans pertes, énergie de réaction nulle, $w_2 = w_1$), la pression reste constante dans le rotor. C'est ce qui permet dans ce cas d'utiliser une admission partielle (une partie seulement des canaux rotoriques sont alimentés et donc actifs) : puisque la pression ne varie pas entre entrée et sortie de la roue, le fluide dans les canaux non alimentés est en équilibre au repos (en repère relatif). En réalité (avec pertes), lorsque la pression est constante à travers le rotor, $w_2 < w_1$ et donc l'énergie de réaction est positive. Pour une machine motrice (seul cas dans lequel on utilise des machines à action en pratique), le degré de réaction est donc négatif (puisque l'énergie totale échangée est négative pour une machine motrice).

15.7 Illustrations : quelques exemples de turbomachines

On terminera en donnant quelques exemples illustratifs.

Remarque : l'énergie cinétique associée à la composante tangentielle de la vitesse à la sortie de la machine étant perdue, il est souhaitable, pour maximiser le rendement, de faire en sorte que cette composante soit nulle à la sortie de la machine. C'est ce que l'on supposera dans la suite.

Si l'on suppose en outre que la vitesse débitante (composante c_m dans le plan méridien, axiale pour une machine axiale, radiale pour une machine radiale) ne varie pas à travers la machine, ce qui est souvent une bonne approximation pour les machines axiales, et parfois aussi pour les machines radiales, alors, pour une machine monocellulaire (ou pour un étage de machine multicellulaire),

$$w = \Delta h + \frac{\Delta c^2}{2} = \Delta h = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}$$

en vertu de l'expression (15.10). Par ailleurs, comme la rothalpie se conserve à travers le rotor,

$$\Delta h_r = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{w_2^2 - w_1^2}{2},$$

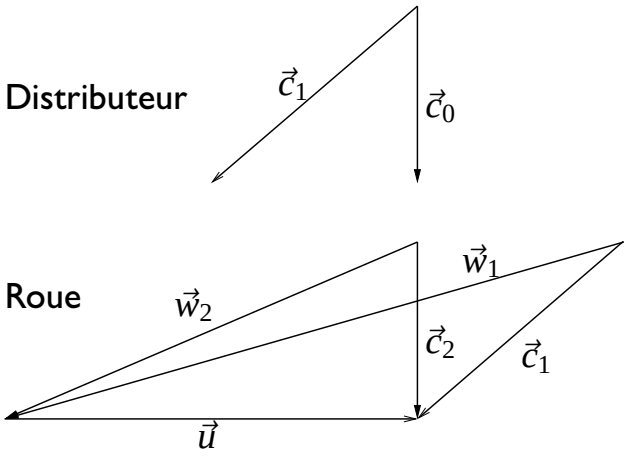
l'énergie de réaction est égale à la variation d'enthalpie à travers le rotor (positive pour une machine réceptrice, négative pour une machine motrice). On peut donc donner une nouvelle interprétation du degré de réaction, à savoir

$$R = \frac{\Delta h_r}{\Delta h_{\text{étage}}},$$

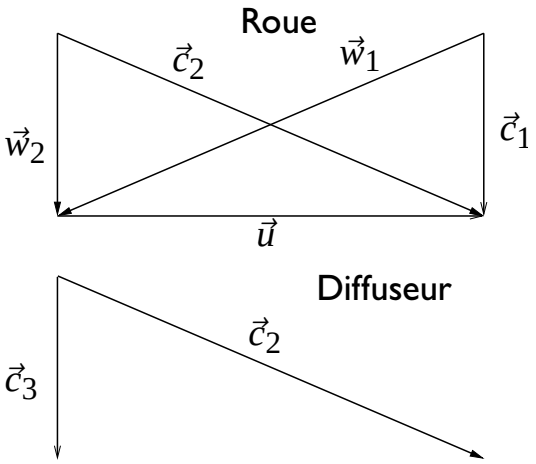
rapport entre la variation d'enthalpie à travers le rotor et la variation d'enthalpie à travers l'étage complet. Il en résulte que l'énergie d'action est égale à la variation d'enthalpie à travers le stator (distributeur et/ou diffuseur).

15.7.1 Ventilateur/soufflante axial(e)

Distributeur + roue



Roue + diffuseur



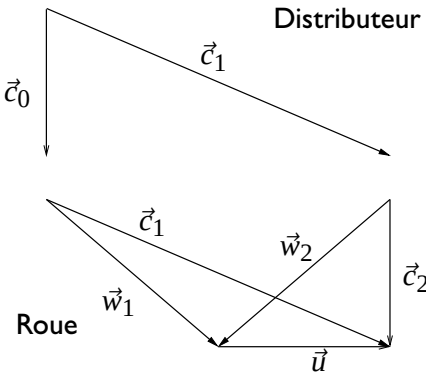
$e_A = \Delta h_S = \frac{c_0^2 - c_1^2}{2} < 0$,
$e_R = \Delta h_R = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} > \Delta h_{\text{étage}} \Rightarrow R > 1$.
On commence par détendre avant de recom-primer ! Ne semble pas logique.

Les deux couronnes d'aubes (fixes et tournantes) contribuent toutes deux à l'augmentation d'enthalpie à travers l'étage. $e_R = \Delta h_R =< \Delta h_{\text{étage}} \Rightarrow R < 1$.

Cette analyse explique pourquoi la configuration roue + diffuseur est préférable pour une machine réceptrice. On s'attend d'ailleurs à ce que le meilleur rendement soit obtenu lorsque la charge est également répartie entre les deux couronnes, soit pour $R = 0,5$ (cas de l'exemple).

15.7.2 Turbine à vapeur/à gaz axiale

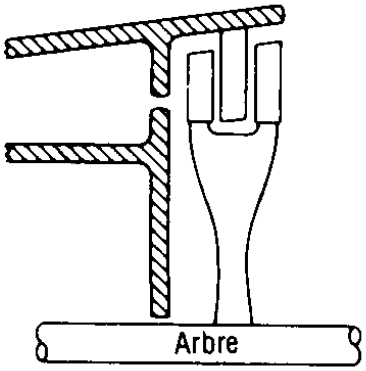
Pour des raisons analogues à celles évoquées à la section précédente, c'est la configuration distributeur + roue qui est préférable pour les machines motrices. On comparera à présent les configurations à action et à réaction.

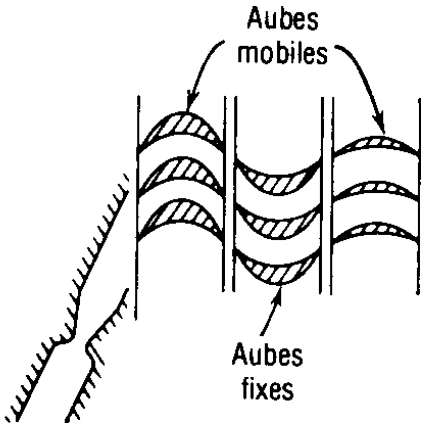


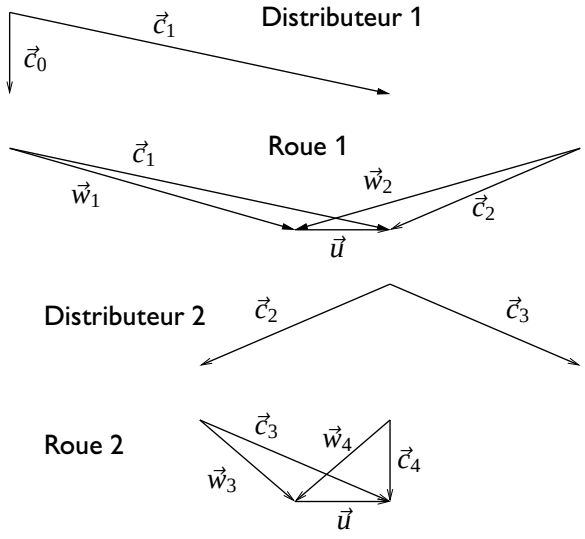
Turbine à action

Pour une machine (axiale) à action, $w_1 = w_2$ et donc, en supposant $w_{1m} = w_{2m}$, $w_{1\theta} = -w_{2\theta}$, si l'on impose $c_{2\theta} = 0$ (sortie purement axiale), alors $w_{2\theta} = -u \Rightarrow w_{1\theta} = u \Rightarrow c_{1\theta} = 2u$.

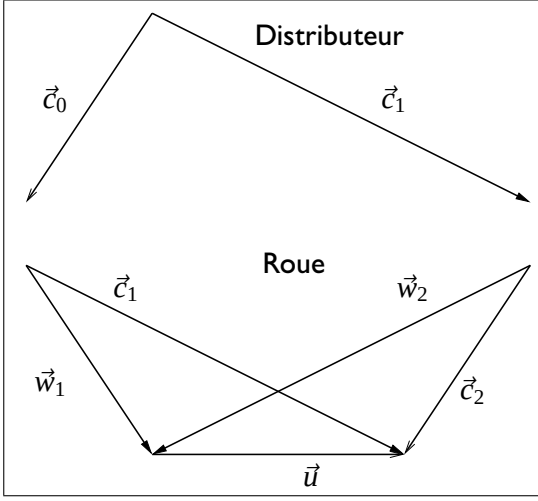
Comme par ailleurs $e_A = \Delta h^* = \frac{c_1^2 - c_0^2}{2} = \frac{c_{1\theta}^2}{2}$, on en déduit $u = \sqrt{2\Delta h^*}/2$. Les vitesses de l'écoulement et d'entraînement peuvent devenir très importantes, ce qui entraîne des pertes par frottement visqueux ($\propto$ (vitesse)^2) importantes et des problèmes mécaniques. Pour y remédier, on peut procéder à l'étagement des vitesses (de la transformation d'énergie cinétique en travail), comme dans le dispositif représenté ci-dessous, qui comporte un deuxième étage comprenant une couronne d'aubes fixes et une deuxième couronne d'aubes mobiles.







L'entièreté de la détente est effectuée dans le premier distributeur (couronne d'aubes fixes ou, plus souvent, tuyères comme dans la turbine à vapeur de Curtis), alors que la pression reste constante dans les deux couronnes mobiles ($w_2 = w_1$ et $w_4 = w_3$) et dans la couronne fixe du deuxième étage ($c_3 = c_2$), ce qui permet d'utiliser l'admission partielle, comme pour la machine à un seul étage.



Turbine à réaction

Le diagramme des vitesses d'une turbine à réaction est semblable à celui d'une soufflante à réaction inversé. Il faut toutefois souligner que, pour un étage intermédiaire, les vitesses d'entrée/sortie ne sont pas nécessairement axiales. Le diagramme ci-contre correspond à une telle situation, avec $R = 0,5$.