

MAT 3720 EXAMEN FINAL

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont permises mais sans utilité pour cet examen. **Encadrer toutes vos réponses finales.** Quelques formules sont fournies à la fin de l'examen.

Problème 1:[7 points] (a) Trouver la série de Fourier de la fonction

$$f(x) = x^2 + 2|x|, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(b) Trouver la période et la série de Fourier (sans calculer d'intégrales) de

$$g(x) = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin^2\left(\frac{7\pi}{10}x\right).$$

Problème 2:[7 points] Résoudre le problème de la chaleur à une dimension suivant:

$$u_t = 9u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0.$$

$$\text{Conditions aux limites: } u(0, t) = 6, \quad u(2, t) = 2.$$

$$\text{Conditions initiales: } u(x, 0) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}x\right).$$

Problème 3:[10 points] Résoudre le problème d'onde suivant (**faire toutes les étapes**):

$$u_{tt} = 25u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$\text{Conditions aux limites: } u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

$$\text{Conditions initiales: } u(x, 0) = 5 \sin\left(\frac{3\pi}{2L}x\right), \quad u_t(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{4L}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4L}x\right).$$

Problème 4: [13 points] On considère une sphère S de rayon $R = 1$ cm. On voudrait étudier la distribution du potentiel électrique autour de S , avec l'hypothèse que le potentiel est borné à l'intérieur de S et nul à l'infini. Pour les coordonnées sphériques r, θ, ϕ , on suppose que le potentiel $u(r, \phi)$ ne dépend pas de θ . Dans ce cas $u(r, \phi)$ satisfait l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{\sin(\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin(\phi) u_\phi) = 0.$$

(a) En utilisant la séparation des variables $u = G(r)H(\phi)$, et l'équation de Laplace satisfaite par $u(r, \phi)$, montrer que $G(r)$ est solution de l'équation de d'Euler:

$$r^2 G'' + 2rG' - kG = 0.$$

(b) En posant $k = n(n+1)$, trouver les deux solutions indépendantes (chercher $G(r)$ sous la forme r^α).

(c) En utilisant le changement de variable $w = \cos(\phi)$, montrer que $H(\phi)$ satisfait l'équation de Legendre:

$$(1 - w^2) \frac{d^2 H}{dw^2} - 2w \frac{dH}{dw} + n(n+1)H = 0.$$

(d) Sachant que la solution de cette équation est $P_n(w) = P_n(\cos \phi)$ où P_n est le polynôme de Legendre de degré n , expliquer pourquoi la solution $u_n = H_n(\cos \phi)G_n(r)$ à l'intérieur de la sphère a la forme:

$$u_n(r, \phi) = A_n r^n P_n(\cos \phi).$$

et la solution à l'extérieur de la sphère a la forme:

$$u_n^*(r, \phi) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \phi).$$

(e) En superposant les solutions propres, trouver $u(r, \phi)$ et $u^*(r, \phi)$ avec la condition initiale:

$$u(1, \phi) = \cos^2 \phi - \sin^2 \frac{\phi}{2}.$$

Problème 5: [13 points] Soit une plaque circulaire de rayon 3 cm, aux faces isolées et de température nulle au bord. On veut étudier le problème de la chaleur sur cette plaque. La température $u(r, \theta, t)$ satisfait l'équation de Laplace:

$$u_t = 36 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 \leq r \leq 3, \quad t > 0,$$

où on a supposé que $u(r, \theta, t) = u(r, t)$ ne dépend pas de θ . On suppose que $u(r, t)$ est bornée et satisfait la condition aux limites $u(3, t) = 0$.

(a) En posant $u(r, t) = W(r)G(t)$, montrer que G et W satisfont:

$$\dot{G}(t) + \lambda^2 G(t) = 0, \quad W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + k^2 W(r) = 0.$$

(b) En faisant le changement de variable $s = kr$ montrer que $W(r)$ satisfait l'équation de Bessel d'ordre 0. Expliquer pourquoi W a la forme $W(r) = A J_0(kr)$.

- (c) Quelles sont les valeurs k_m de k qui permettent à $W(r)$ de satisfaire la condition aux limites.
- (d) Résoudre pour $G(t)$ avec les valeurs trouvées de k_m .
- (e) Trouver $u(r, t)$ avec la condition initiale

$$u(r, 0) = 2J_0\left(\frac{\alpha_1}{3}r\right) - 3J_0\left(\frac{\alpha_5}{3}r\right) = f(r),$$

où les α_n sont les zéros de J_0 .

Problème 6: [points bonus]

- (a) Expliquer le rôle de l'orthogonalité pour résoudre les différents problèmes physiques dans ce cours.
- (b) Donner la distinction entre le rôle des conditions initiales et le rôle des conditions aux limites dans les différents problèmes qu'on a étudiés (chaleur, ondes, potentiel, etc.).
-

Quelques formules

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x), \\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)], \\ \cos(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)], \\ \sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)].\end{aligned}$$

Les polynômes de Legendre satisfont les relations d'orthogonalité suivantes:

$$\int_0^\pi \sin\phi P_m(\cos\phi)P_n(\cos\phi)d\phi = 0 \text{ si } m \neq n,$$

et

$$\int_0^\pi \sin\phi P_n^2(\cos\phi)d\phi = \frac{2}{2n+1}.$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 3x^2/2 - 1/2, \quad P_3(x) = 5x^3/2 - 3x/2$$

L'équation de Bessel d'ordre ν est:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$