Université d'Ottawa

Départment de Mathématique et Statistique

MAT 1702A: Méthodes Mathématiques II

Professeure: Yasmine Samia

Examen Pratique 1

Instructions: (les instructions pour le test seront semblables à celles-ci)

- Montrez les détails de votre travail et justifiez vos réponses pour avoir des notes complètes.
- Tout le travail qui va étre considéré pour la correction devrait être rédigé dans l'espace prévu. Le verso des pages est pour le brouillon. Si vous trouvez que vous avez besoin d'espace supplémentaire afin de répondre à une question particulière, vous devez continuer sur le verso de la page et indiquer celà **clairement**. Sinon, ce que vous écrivez sur le verso des pages ne sera pas considéré pour la correction.
- L'utilisation de documents (notes de cours, livres, brouillon, etc), de calculatrice, de téléphones cellulaires ou de tout autre appareil électronique est **interdite**.
- Il est recommendé d'écrire en stylo et non en crayon.
- Bonne chance!

Attention:

- Ce test est pour vous **pratiquer** seulement.
- Il n'y a aucune raison de penser que cet examen va ressembler à l'examen partiel 1.
- Le test sert comme outil pour juger la longueur approximative du test et le type de questions possibles qui peuvent y apparaître.
- Il est important d'étudier **tout** le matériel couvert en classe, et **non** seulement les questions qui sont sur ce test.

(1) Considérez le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Précisez si le système ci-dessus est compatible ou incompatible. S'il est compatible, donnez la forme paramétrique vectorielle de la solution générale.

Solution: La matrice augmentée associée au système est:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

On réduit cette matrice par rapport aux lignes:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - L_1 \to L_3]{L_2 - 3L_1 \to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1.5 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 2L_2 \to L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3 \to L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 + 0.5L_3 \to L_2]{L_1 - 2L_3 \to L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 + L_2 \to L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

La dernière colonne n'est pas une colonne pivot, le système est alors compatible. La solution générale est donnée par le système suivant:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & +2x_4 & = 1 \\ & x_2 & & +x_4 & = -2 \\ & & x_3 & & = -1 \\ & & & x_4 & \text{libre} \end{array}.$$

Sous forme paramétrique vectorielle, la solution générale est:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_4 \\ -2 - x_4 \\ -1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_4 \in \mathbb{R}.$$

(2) Pour le système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & + & ax_2 & = & a-b \end{array}$$

(a) Déterminez les valeurs de a et b pour lesquelles le système admet:
  (i) aucune solution,
  (ii) une infinité de solutions,
  (iii) une solution unique.

Solution: La matrice augmentée correspondante est:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 2 & a & a-b \end{array}\right] \xrightarrow{L_2-2L_1\to L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a-6 & a-b-8 \end{array}\right]$$

Le système admet:

(i) aucune solution, $\iff$ la dernière colonne est une colonne pivot $\iff$ $a-6=0, a-b-8\neq 0 \iff a=6, -2-b\neq 0 \iff a=6, b\neq -2$

(ii) infinité de solutions , $\iff$ la deuxième ligne ne contient pas de position pivot $\iff$ $a-6=0, a-b-8=0 \iff a=6, -2-b=0 \iff a=6, b=-2$

(iii) une soultion unique $\iff$ si la deuxième colonne contient une position pivot $a-6\neq 0 \iff a\neq 6$.

(b) Dans le cas (ii) ci-dessus, donnez la solution générale du système.

Solution: Ici, $a=6, b=-2$, alors la matrice est $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ et le système linéaire correspondant est $x_1+3x_2=4$ où x_2 est une variable libre. Donc la solution générale est

$$x_1 = 4-3x_2, \quad x_2\in\mathbb{R}.$$

(3) Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 4 \end{bmatrix}$ où β est le deuxième chiffre de votre numéro d'étudiant.

Est ce que $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$? Justifiez votre réponse.

Solution: Le vecteur $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ si et seulement si l'équation vectorielle $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{b}$ admet une solution. La matrice augmentée correspondant à l'équation vectorielle est:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & \beta \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

la réduction par rapport aux lignes donne:

$$\xrightarrow[L_3-2L_1\to L_3]{L_2-2L_1\to L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \beta-2 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{-2}L_2\to L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-\beta}{2}+1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+L_2\to L_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-\beta}{2}+1 \\ 0 & 0 & \frac{-\beta}{2}+3 \end{array}\right]$$

Le système linéaire correspondant à la matrice augmentée est compatible si et seulement si $\frac{-\beta}{2}+3=0 \Rightarrow \beta=6$. Donc, si $\beta=6$, alors $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Si $\beta\neq 6$, alors $\mathbf{b}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

(4) Soit l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ suivante où:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -4 & 8 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -20 \end{bmatrix}$$

(a) Ecrire l'équation vectorielle équivalente à cette équation matricielle.

Solution:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -20 \end{bmatrix}$$

(b) Résoudre cette équation. Ecrire la solution sous forme paramétrique vectorielle.

Solution: On écrit la matrice augmentée correspondante et on la réduit:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3+4L_1 \to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système est compatible, on continue alors la réduction

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}L_2 \to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{2L_2+L_1 \to L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{16}{3} & \frac{29}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 est une variable libre, x_1 et x_2 sont des variables de base. La solution générale est alors:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{16}{3}x_3 + \frac{29}{3} \\ x_2 & = & -\frac{5}{3}x_3 + \frac{7}{3} \\ x_3 & & \text{libre} \end{array}$$

Sous forme paramétrique vectorielle:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{3}x_3 + \frac{29}{3} \\ -\frac{5}{3}x_3 + \frac{7}{3} \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{16}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{29}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

(c) Déduire la solution du système homogène correspondant $A\vec{x} = \vec{0}$.

Solution: La solution du système homogène s'obtient en éliminant le vecteur correspondant à la solution particulière:

$$\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{16}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

(5) (a) Pour quelles valeurs de r les vecteurs suivants sont linéairement indépendants?
$\vec{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{a_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{a_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ r \end{bmatrix}$

Solution: Les vecteurs sont linéairement indépendants si l'équation vectorielle

$$x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_3\vec{a_3} = \vec{0}$$

n'admet que la solution triviale.
Notez que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & r & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+L_1\to L_3]{L_2-2L_1\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & r-1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-\frac{1}{3}L_2\to L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & r-4 & 0 \end{array}\right]$$

Si $r \neq 4$, il y a seulement la solution triviale, et alors les vecteurs seront linéairement indépendants.

(b) Pour $r = 4$, trouvez une relation de dépendance linéaire entre ces trois vecteurs.

Solution: Pour $r = 4$, on continue la réduction de la matrice augmentée et on trouve une solution non triviale:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{L_2}{-3}\to L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2L_2+L_1\to L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solution générale est alors:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5x_3 \\ x_2 &= 3x_3 \\ x_3 &\ \ \text{libre} \end{aligned}$$

Et pour trouver une relation de dépendance linéaire, on peut choisir n'importe quelle solution particulière. Par exemple, on choisit $x_3 = 1$, alors $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$. La relation de dépendance est alors:

$$-5\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

(6) Considérez le réseau routier décrit par le digramme de flux suivant. Les lettres de A jusqu'à D dénotent les intersections des routes, et les valeurs numériques indiquent le flux de voitures par minute. Les flèches indiquent le sens du flux (toutes les routes sont à sens unique).

$$\begin{tikzcd}
 & 10 \arrow[d] & 15 & \\
20 \arrow[r] & B \arrow[r, "x_3"] \arrow[d, "x_2"'] & C \arrow[r] \arrow[u] & 25 \\
30 & A \arrow[l] \arrow[d] & D \arrow[l, "x_1"'] \arrow[u, "x_4"'] & 40 \arrow[l] \\
 & 20 & 20 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

(a) Ecrire un système d'équations linéaires qui décrit le réseau routier. Indiquez aussi toutes les contraintes sur les variables.

Solution: A chaque intersection, le flux entrant doit être égal au flux sortant:

$$\begin{array}{llcl}
(A) & x_1 + x_2 & = & 20 + 30 \\
(B) & 10 + 20 & = & x_2 + x_3 \\
(C) & x_3 + x_4 & = & 15 + 25 \\
(D) & 40 + 20 & = & x_1 + x_4
\end{array}$$

En outre, le flux total entrant est égal au flux total sortant:

$$10 + 20 + 20 + 40 = 30 + 20 + 25 + 15 = 90$$

Contraintes: Il faut que $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

(b) La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée associée au système de la partie (a) est:

$$\left[\begin{array}{cccr|r}
1 & 0 & 0 & 1 & 60 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -10 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 40 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Trouvez la solution générale du système.

Solution: x_4 est la variable libre. La solution générale est alors:

$$\begin{array}{lcl}
x_1 & = & 60 - x_4 \\
x_2 & = & -10 + x_4 \\
x_3 & = & 40 - x_4 \\
x_4 & & \text{libre}
\end{array}$$

(c) Quelles sont les valeurs minimales et maximales de x_4?

Solution: Puisque toutes les variables doivent être ≥ 0, on a alors:

- d'après la première équation: $x_1 \geq 0$ alors $x_4 \leq 60$
- d'après la deuxième équation: $x_2 \geq 0$ alors $x_4 \geq 10$
- d'après la troisième équation: $x_3 \geq 0$ alors $x_4 \leq 40$

Donc, il faut que $10 \leq x_4 \leq 40$

(d) Si le flux le long de DC est limité à un maximum de 20 voitures par minute à cause des travaux de construction, quel est le flux maximal possible le long de DA?

Solution: Le flux le long de DC est donné par x_4, alors on a que $10 \leq x_4 \leq 20$. Le flux le long de DA est donné par x_1, alors il faut que:

$$\begin{gathered} 10 \leq x_4 \leq 20 \\ -20 \leq -x_4 \leq -10 \\ 60 - 20 \leq 60 - x_4 \leq 60 - 10 \\ 40 \leq x_1 \leq 50 \end{gathered}$$