# Université d'Ottawa

Départment de Mathématiques et Statistiques

MAT 1702B : Méthodes mathématiques II

Professeur : Camille MALE

Examen Partiel 3

20 Mars 2014

Nom ______________________ Prénom ______________________

Numéro d'étudiant ______________________

**Instructions :**

(a) Vous avez 80 minutes minutes pour compléter cet examen.

(b) Ecrivez votre numéro d'étudiant sur chaque feuille dans l'espace correspondant.

(c) Montrez les détails de votre travail et justifiez vos réponses pour avoir des notes complètes.

(d) Tout le travail qui va étre considéré pour la correction devrait être rédigé dans l'espace prévu. Le verso des pages est pour le brouillon. Si vous trouvez que vous avez besoin d'espace supplémentaire afin de répondre à une question particulière, vous devez continuer sur le verso de la page et indiquer celà **clairement**.

(e) L'utilisation de documents (notes de cours, livres, brouillon, etc), de calculatrice, de téléphones cellulaires ou de tout autre appareil électronique est **interdite**.

(f) Il est recommendé d'écrire en stylo et non en crayon.

(g) La dernière page de l'examen peut être utilisée comme brouillon.

Bonne chance !

SVP ne pas écrire dans le tableau ci-dessous.

| Question | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Maximum | 2 | 5 | 5 | 5 | 2 | 5 | 3 | 27 |
| Note | | | | | | | | |

QUESTION 1. [**2 points**] Lesquelles des propositions suivantes sont vraies ? A noter que plusieurs propositions peuvent être vraies. Vous devez indiquer **toutes** les propositions vraies. (Vous perdrez des points si vous indiquez qu'une proposition fausse est juste, mais vous ne pouvez obtenir une note négative à cette question.)

(a) Si $A$ est une matrice de taille $n \times m$ alors $rang\, A + \dim\, Ker\, A = n$.

(b) Si $A$ est une matrice carré de taille paire, alors $-A$ a même déterminant que $A$.

(c) Le déterminant de la somme de deux matrice est la somme de leur déterminants.

(d) Le cofacteur $(i, j)$ d'une matrice $A$ est la matrice $A_{i,j}$ obtenue en supprimant la $i$eme ligne et la $j$eme colonne de $A$.

(e) Une matrice est inversible si et seulement si sa transposée est inversible

(f) Echanger deux lignes d'une matrice ne modifie pas son déterminant.

**Solution:** (b), (e)

Question 2. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) [**4 points**] Déterminer une base de $Ker\, A$.

**Solution:** On calcule la (F.E.R.) de $A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ainsi, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$ est dans $Ker\, A$ si et seulement si

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 - 3x_5 \\ x_2 &= -x_3 + 5x_5 \\ x_4 &= -2x_5 \\ x_3, x_5 &\in \mathbb{R} \;\; \text{libre} \end{aligned}$$

c'est à dire

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 - 3x_5 \\ -x_3 + 5x_5 \\ x_3 \\ -2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \times \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, une base de $Ker\, A$ est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) [**1 points**] Quelle est la dimension de $Ker\, A$ ?

**Solution:** C'est le nombre de vecteur de la base, donc $\dim Ker\, A = 2$

Question 3. Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 5 & 6 & -6 \\ 2 & -3 & 5 & 7 & -4 & 12 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) **[3 points]** Déterminer une base de $Im\, A$.

**Solution:** On calcule une (F.E) de $A$.

$$A \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 & -6 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 10 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 22 & -19 \end{bmatrix}.$$

Les colonnes 1, 3 et 4 sont en position pivot, donc les colonnes correspondantes de $A$ constituent une base de $Im\, A$ :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) **[1 points]** Quel est le rang de $A$ ?

**Solution:** C'est le nombre de vecteur de la base, donc $rang\, A = 3$

(c) **[1 points]** En déduire la dimension de $Ker\, A$ (on ne demande pas de nouveaux calculs sur la matrice pour cette question).

**Solution:** Par le théorème du rang

$$dim\, Ker A = 6 - rang\, A = 3$$

QUESTION 4. [**5 points**] Parmi les familles de vecteurs suivantes, lesquelles constituent des bases (justifier la réponse par un calcul).

1. $$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$
2. $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

**Solution:** Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ constituent une base si la matrice formée de ces vecteurs a un déterminant non nul. On peut aussi calculer la (F.E.) de $A$ mais il est plus simple de calculer le déterminant (le calcul est plus souple que celui de la (F.E.)).

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 12 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} \underset{Dev\, L_1}{=} 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 2 \times 10 - 4 \times 5 = 0.$$

La famille n'est donc pas une base.

2. Une base de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement constituée de 3 vecteurs, donc la famille n'est pas une base.

3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 9 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \end{vmatrix} \underset{Dev\, L_2}{=} -1 \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -\big(9 \times (-2) - (-2) \times 2\big) = 14 \neq 0.$$

Donc la famille est une base.

QUESTION 5. [**2 points**] Soient $A, B$ et $C$ des matrices de tailles $4 \times 4$. On suppose que $\det A = 2$ et que la matrice $(A^{-1})^3 BC^T B^{-1} = -2I_4$, où $I_4$ désigne la matrice identité de taille $4 \times 4$.
Quel est le déterminant de $C$ ?

**Solution:** On passe l'galité $(A^{-1})^3 BC^T B^{-1} = -2I$ au déterminant :

$$\det\big((A^{-1})^3 BC^T B^{-1}\big) = -\det\big(2I_4\big).$$

Or on a $\det(-2I_4) = (-2)^4 \det I_4 = 16$. De plus,

$$\det\big((A^{-1})^3 BC^T B^{-1}\big) = (\det A)^{-3} \det B \det C \frac{1}{\det B} = 2^{-3} \det C.$$

D' où $2^{-3} \det C = 2^4$ donc $\det C = 2^7 = 128$.

Question 6. [**5 points**] Calculer le déterminant de la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 9 & 0 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Solution:** La matrice ne se simplifie pas directement par la méthode des pivots. Par contre, comme il y a une ligne avec 4 zéros, il n'y a pas d'hésitation, on effectue le développement par rapport à cette ligne (toutes les autres décisions sont plus compliquées).

$$\det A \overset{Dev\,L_4}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut développer selon la seconde ligne ou la seconde colonne, ou auparavant ajouter un zéro à la seconde ligne. Appliquons cette dernière méthode.

$$\det A \overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_4}{=} -3 \begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{Dev\,L_2}{=} -3 \times 2 \times \begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 9 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut développer selon la première ligne ou seconde colonne, ou auparavant ajouter un zéro à la première ligne.

$$\det A \overset{C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3}{=} -6 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{Dev\,C_1}{=} -6 \times (-3) \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 18 \times (15 - 16) = -18$$

QUESTION 7. [**3 points**] Soit $A$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer que 1 est valeur propre de $A$ et déterminer une base de $E_1 = Ker\,(A - I_3)$. **Solution:**

On écrit

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Reste à résoudre $(A - I_3)x = 0$. Il est immédiat que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in E_1 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ \ x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ \text{libres} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, 1 est valeur propre de $A$ et une base de $E_1$ est

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$