

Université d'Ottawa  
Département de Mathématiques et Statistiques

MAT 1702B : Méthodes mathématiques II  
Professeur : Camille MALE

Examen Partiel 2 – Correction  
26 Février 2014

QUESTION 1. [4 points] Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculer la matrice indiquée ou signaler que les opérations ne sont pas définies.

(a)  $AB - BA$

**Solution:**  $AB - BA$  n'est pas défini.

(b)  $AC$

**Solution:**

$$AC = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)  $2B - C^T$

**Solution:**

$$2B - C^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

QUESTION 2. [2 points] Lesquelles des propositions suivantes sont vraies? A noter que plusieurs propositions peuvent être vraies. Vous devez indiquer **toutes** les propositions vraies. (Vous perdrez des points si vous indiquez qu'une proposition fausse est juste, mais vous ne pouvez obtenir une note négative à cette question.)

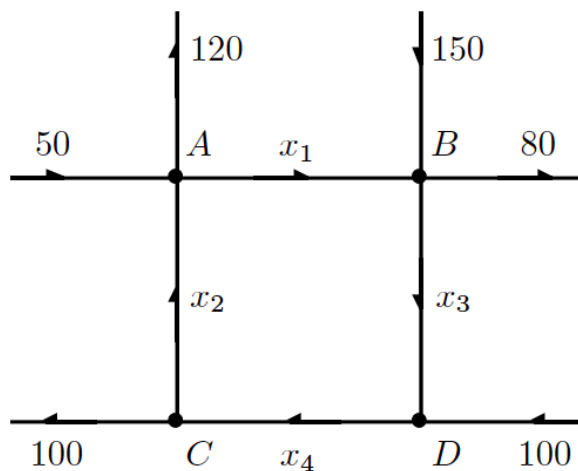
- (a) Si une famille est liée, alors tout vecteur est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.
- (b) Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $ab - cd \neq 0$  alors  $A$  est inversible.
- (c) Pour que le produit  $A \times B$  soit défini, il faut que le nombre de colonnes de  $A$  soit égal au nombre de lignes de  $B$ .
- (d) L'inverse du produit de deux matrices  $A$  et  $B$  est égale au produit de l'inverse des matrices  $A^{-1}B^{-1}$ .
- (e) Trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  appartenant au même plan de  $\mathbb{R}^3$  sont liés.
- (f) Si  $A$  et  $B$  sont des matrices telles que  $AB = 0$ , alors  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

**Solution:** (c), (e)

**Note:** Chaque proposition vraie qui est énoncée comme telle donne un point, chaque proposition fausse qui est énoncée comme vraie fait perdre un point.

## QUESTION 3.

(a) [3 points] Ecrire un système d'équations linéaires décrivant le flux du réseau ci-dessous. Les lettres A-D étiquettent les noeuds du réseau et les flèches indiquent la direction du flux. Ne retenir que les équations pertinentes. On ne demande pas de résoudre le système.



**Solution:** Les équations d'équilibre sont (entrant = sortant)

$$\text{En A : } x_2 + 50 = x_1 + 120,$$

$$\text{En B : } x_1 + 150 = x_3 + 80,$$

$$\text{En C : } x_4 = x_2 + 100,$$

$$\text{En D : } x_3 + 100 = x_4,$$

$$\text{Global : } 50 + 150 + 100 = 80 + 120 + 100.$$

D'où le système,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -70 \\ x_1 - x_3 = -70 \\ x_2 - x_4 = -100 \\ x_3 - x_4 = -100 \end{cases}$$

**Note:** Les signes pour chaque équation peuvent changer. -1 point s'il manque l'équation globale "50 + 150 + 100 = 80 + 120 + 100".

(b) [2 points] La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée associée au système linéaire de la question (a) est

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -170 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Ecrire la solution générale du flux dans le réseau. Quelles sont les valeurs minimales et maximales que peut prendre  $x_4$  (les flux doivent être positifs ou nuls).

**Solution:** Les solutions du système du a) sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_4 - 170 \\ x_2 = x_4 - 100 \\ x_3 = x_4 - 100 \\ x_4 \in \mathbb{R}, \text{ quelconque.} \end{array} \right.$$

Avoir  $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$  signifie avoir

$$x_4 - 170 \geq 0, x_4 - 100 \geq 0, x_4 \geq 0,$$

ce qui se résume à

$$x_4 \geq 170.$$

QUESTION 4.

(a) [4 points] La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

est elle inversible? Si oui, déterminer son inverse.

**Solution:** On écrit la matrice augmentée de l'identité et procède à la décomposition (F.E.R.) de  $A$  :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Therefore, the matrix  $A$  is invertible and its inverse is

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Remarque : il est ESSENTIEL d'arriver à l'identité dans la partie de gauche.

(b) [2 points] Soit  $A$  la matrice de (a) et  $B$  une matrice de taille  $3 \times 3$  telle que

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice  $B$ .

**Solution:** Puisque  $A$  est inversible, on a  $B = A^{-1}(AB)$ . Attention, il faut multiplier à gauche la matrice  $AB$  par  $A^{-1}$  (on n'a pas  $B = (AB)A^{-1}$ ). Dès lors, comme on a calculé  $A^{-1}$ , on a

$$B = A^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -7 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

QUESTION 5. Une économie est constituée de deux secteurs : l'infrastructure et les télécommunications. On suppose que la matrice de consommation de cette économie est

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 \end{bmatrix},$$

où la première ligne et colonne correspondent à l'infrastructure et la seconde ligne et colonne aux télécommunications.

- (a) [1 point] Ecrire l'équation de production du modèle de Leontief.

**Solution:** L'équation est  $x = Cx + d$  ou encore  $(Id - C)x = d$ .

- (b) [4 points] Déterminer le niveau de production nécessaire pour satisfaire une demande finale  $d = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$ .

**Solution:** On doit résoudre l'équation  $Ax = d$ , où

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.5 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

On a  $\det A = 0.5 \times 0.6 - 0.5 \times 0.2 = 0.3 - 0.1 = 0.2 \neq 0$ , donc  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{0.2} \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = 5 \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ainsi } x = A^{-1}d = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2.5 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

