Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistique

MAT 1702B: Méthodes mathématiques II
Professeur : Camille MALE

Test 1 – le 29 janvier 2014

Nom ______________________ Prénom ____________________

d'étudiant ____________________

Instructions :

(1) L'examen est d'une durée de 80 minutes.
(2) Le nombre de points pour chaque question est indiqué entre les parenthèses carrées.
(3) Vous devez justifier vos réponse en exposant des calculs lisibles.
(4) Veuillez utiliser l'espace désigné pour écrire vos réponses. Vous pouvez utiliser le verso de chaque feuille comme papier brouillon. Par contre, ces brouillons ne seront pas considérés lors de la correction.
(5) Ecrivez votre numéro d'étudiant au haut de chaque feuille.
(6) Aucune note de cours, aucune calculatrice ni papier brouillon n'est permis.
(7) Bonne chance !

Ne pas écrire dans le tableau suivant.

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Maximum	3	2	5	5	4	6	25
Note							

1. Calculez

(a) [**1 point**] $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} =$

Solution: $\begin{bmatrix} 17 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

(b) [**2 points**] $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} =$

Solution: $1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. [**2 points**] Lesquelles des propositions suivantes sont vraies ? A noter que plusieurs propositions peuvent être vraies. Vous devez indiquer **toutes** les propositions vraies. On ne demande pas de rédiger une justification.

(a) Si l'équation $Ax = b$ n'est pas compatible, alors l'équation homogène $Ax = 0$ admet une unique solution.
(b) Si l'une des lignes d'une forme échelonnée d'une matrice A a la forme $[0, 0, 0, 1]$, alors le système linéaire homogène $Ax = 0$ n'est pas compatible.
(c) Un sous espace vectoriel engendré par un vecteur est toujours une droite.
(d) Si l'équation $Ax = b$ est compatible alors le vecteur b est combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.
(e) L'équation $Ax = b$ est homogène si le vecteur nul est solution.

Réponse:________________________

Solution: (d), (e)

3. [**5 pts**] Trouver toutes les solutions du système linéaire suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ x_1 & + & & - & x_3 & = & -3 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 14 \end{array}\right.$$

Solution: On met la matrice sous forme échelonnée:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & 2 & 8 \\ -4 & 4 & 6 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 2 & 8 \\ -4 & 4 & 6 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 4L_1]{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ainsi, il y a une solution unique donnée par:

$$x_1 = -6, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -3.$$

4. [**5 pts**] Pour quelles valeurs de h et k le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 3hx_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 9x_2 & = & k \end{array} \right.$$

(a) n'admet aucune solution

(b) admet une solution unique

(c) admet une infinité de solutions

Solution: On réduit la matrice augmentée:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3h & 1 \\ 3 & 9 & k \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3h & 1 \\ 0 & 9+9h & k-3 \end{array} \right]$$

(a) Le système n'a pas de solution si $h = -1$ et $k \neq 3$.
(b) Le système admet une solution unique si $h \neq -1$.
(c) Le système admet une infinité de solutions si $h = -1$ et $k = 3$.

5. [**4 pts**]

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 5 & 8 & -6 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} h \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$.

Pour quelles valeurs possibles de h et k le système $Ax = b$ est-il compatible?

Solution: On réduit la matrice augmentée sous forme echelonnée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & h \\ 0 & 7 & -4 & 1 \\ 5 & 8 & -6 & k \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & h \\ 0 & 7 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & k-5h \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-5h+1 \end{array}\right]$$

Le système est compatible si la dernière ligne n'est pas de la forme $[0 \ldots 0|c]$ où $c \neq 0$. C'est à dire, on doit avoir $k - 5h + 1$. En d'autres termes, $k = 5h - 1$.

6. **[6 pts]** Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

(a) Trouver les solutions du système homogène $Ax = 0$ sous forme paramétrique vectorielle. Quelle est l'interpretation géométrique de l'ensemble des solutions?

Solution: On réduit la matrice augmentée en forme echelonnée réduite

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{-1}{4} L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_1 et x_2 sont des variables de base et x_3 est une variable libre. Le système correspondant est:

$$\begin{cases} x_1 \quad + \quad 2x_3 \quad = \quad 0 \\ x_2 \quad - \quad x_3 \quad = \quad 0 \\ x_3 \quad \in \mathbb{R} \quad \text{libre} \end{cases}$$

On obtient alors: x est solution si et seulement s'il est de la forme

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi l'ensemble solution est

$$\left\{ v = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ où } s \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est une droite dirigée par le vecteur $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Soit

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vérifiez que

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

est une solution particulière de l'équation matricielle $Ax = b$, et trouvez la solution générale de l'équation $Ax = b$ *sous forme paramétrique vectorielle.* (Noter que la matrice A est la même que dans la partie (a).

Solution: Après vérification de la solution particulière, on doit l'ajouter à la solution du système homogène de la question (a). Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $Ax = b$ est

$$\left\{ v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{où} s \in \mathbb{R}. \right\}$$

Cette page est dédiée à vos brouillons.