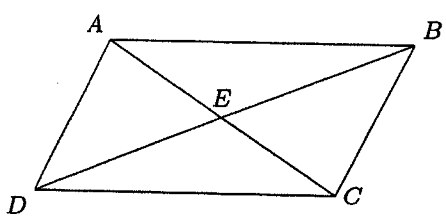
Mat 1739 hiver 2014

Devoir 4 : à remettre le mardi 1er avril

Nom de famille (MAJUSCULES)	______________________
Prénom (MAJUSCULES)	______________________
Signature	______________________
Numéro d'étudiant	______________________

Instructions: Imprimez ce questionnaire et inscrivez vos noms et numéro d'étudiant ci-dessus. Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet ci-dessous. Vous devez donner des solutions complètes (pas seulement les réponses).

Question 1. Dans le parallélogramme suivant, E est le point d'intersection des diagonales AC et BD.



Calculez les vecteurs suivants :

(a) $\vec{AB} + \vec{BC}$

(b) $\vec{BC} - \vec{BA}$

(c) $\vec{DA} + \vec{AE} - \vec{DC}$

Vous devez donner chaque réponse sous la forme d'un vecteur $\vec{PQ}$ où P et Q sont des points choisis parmi A, B, C, D, E.

(a) $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

(b) $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{BC} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

(c) $\vec{DA} + \vec{AE} - \vec{DC} = \vec{DA} + \vec{AE} + \vec{CD} = \vec{DE} + \vec{CD}$

$= \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{CE}$

<u>Remarque</u> : $\vec{CE} = \vec{EA}$ donc $\vec{EA}$ est aussi une bonne réponse pour (c).

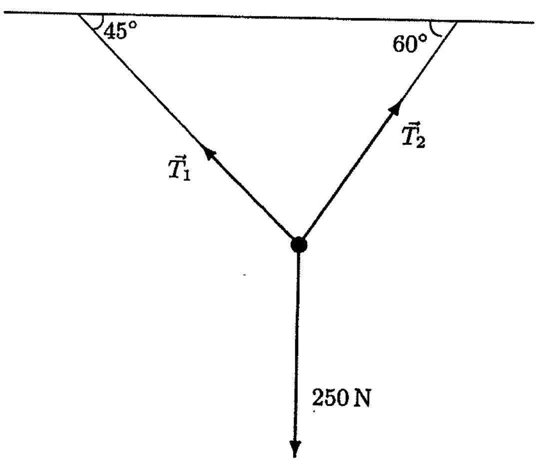
Question 2. Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des vecteurs. Simplifiez chaque expression.
(a) $\vec{x}+\vec{y}-2\vec{x}+3\vec{y}$
(b) $2(\vec{x}-\vec{y})+4(\vec{y}-\vec{x})$
(c) $3(\vec{x}+\vec{y})-2(\vec{x}-\vec{y})-5\vec{x}$

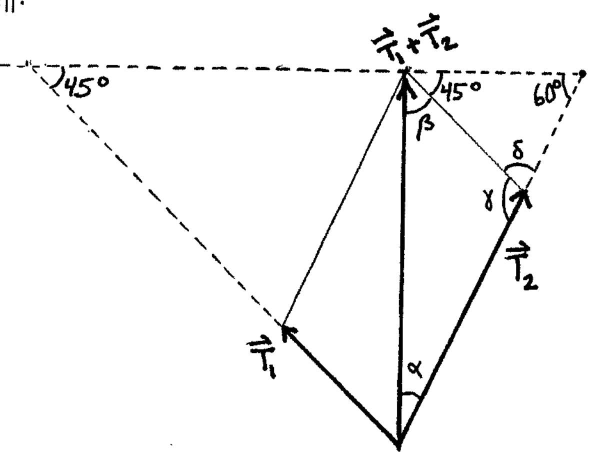
(a) $\vec{x}+\vec{y}-2\vec{x}+3\vec{y} = (\vec{x}-2\vec{x})+(\vec{y}+3\vec{y}) = -\vec{x}+4\vec{y}$.

(b) $2(\vec{x}-\vec{y})+4(\vec{y}-\vec{x}) = 2x-2y+4y-4\vec{x} = -2\vec{x}+2\vec{y}$.

(c) $3(\vec{x}+\vec{y})-2(\vec{x}-\vec{y})-5\vec{x} = 3\vec{x}+3\vec{y}-2\vec{x}+2\vec{y}-5\vec{x}$
$= -4\vec{x}+5\vec{y}$.

Question 3. Un objet pesant 250 N est suspendu au plafond au moyen de deux chaînes de longueurs inégales, tel qu'indiqué dans le diagramme ci-dessous. Soient $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ les tensions dans les chaînes. Calculez $\|\vec{T_1}\|$ et $\|\vec{T_2}\|$.



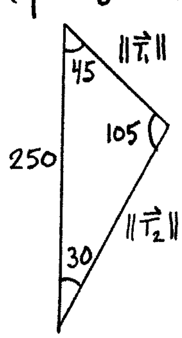


On utilise que $\vec{T_1}+\vec{T_2}$ est vertical (vers le haut ↑) et $\|\vec{T_1}+\vec{T_2}\| = 250$.

$\delta + 45° + 60° = 180° \Rightarrow \delta = 75° \Rightarrow \gamma = 180° - \delta = 105°$.

$\beta + 45° = 90° \Rightarrow \beta = 45°$.

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$. Loi des sinus :



$$\frac{250}{\sin 105°} = \frac{\|\vec{T_1}\|}{\sin 30°} = \frac{\|\vec{T_2}\|}{\sin 45°}$$

$$\Rightarrow \|\vec{T_1}\| = \frac{250 \sin 30°}{\sin 105°} = 129{,}4 \text{ N}$$

$$\text{et } \|\vec{T_2}\| = \frac{250 \sin 45°}{\sin 105°} = 183{,}0 \text{ N}$$

Question 4. Soient $\vec{u} = [2, 1, -1]$, $\vec{v} = [1, -2, 3]$ et $\vec{w} = [-3, 0, 2]$. Calculez :
(a) $3(\vec{u} - 2\vec{w}) + 4(\vec{v} + \vec{w})$
(b) $\vec{u} \cdot (3\vec{w})$
(c) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$
(d) $\vec{v} \cdot \vec{w} \times (2\vec{u})$

(a) $3(\vec{u} - 2\vec{w}) + 4(\vec{v} + \vec{w}) = 3\vec{u} + 4\vec{v} - 2\vec{w} = 3[2,1,-1] + 4[1,-2,3] - 2[-3,0,2]$
$= [16, -5, 5]$.

Avant de répondre à (b, c, d) on peut calculer :

$\vec{u} \cdot \vec{w} = -8$, $\quad \vec{u} \times \vec{v} = [1, -7, -5]$, $\quad \vec{u} \times \vec{w} = [2, -1, 3]$.

(b) $\vec{u} \cdot (3\vec{w}) = 3(\vec{u} \cdot \vec{w}) = 3(-8) = -24$.

(c) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} = [1, -7, -5] + [2, -1, 3] = [3, -8, -2]$.

(d) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times (2\vec{u})) = \vec{v} \cdot (2(\vec{w} \times \vec{u})) = \vec{v} \cdot ((-2)(\vec{u} \times \vec{w})) = (-2)\ \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$
$= -2\ [1, -2, 3] \cdot [2, -1, 3] = -26$.

Question 5. Soient $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 2\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Calculez :
(a) $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$
(b) $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$
(c) l'angle entre les vecteurs $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$ et $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$.

$\vec{u} = [3, 0, -2]$, $\quad \vec{v} = [1, 2, 1]$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, $\quad \|\vec{u}\|^2 = 13$, $\|\vec{v}\|^2 = 6$.

(a) $\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \dfrac{1}{13}[3, 0, -2] = \dfrac{1}{13}\vec{u}$

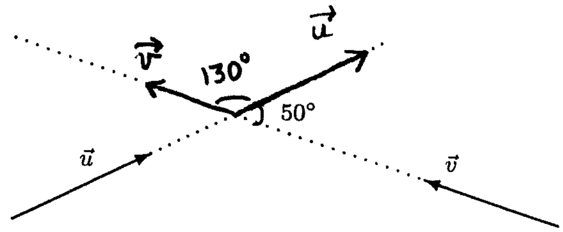
(b) $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \dfrac{1}{6}[1, 2, 1] = \dfrac{1}{6}\vec{v}$

(c) Angle entre $\frac{1}{13}\vec{u}$ et $\frac{1}{6}\vec{v}$ $= \underbrace{\text{angle entre } \vec{u} \text{ et } \vec{v}}_{\theta}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{6}} \approx 0{,}1132$$

$$\Longrightarrow \theta \approx \cos^{-1}(0{,}1132) \approx 83{,}5°.$$

Question 6. Calculez $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$, où $\|\vec{u}\| = 15$, $\|\vec{v}\| = 12$ et :



L'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est de 130°.

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot \sin(130°)$$
$$= 137{,}9$$

Question 7. Soient $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$.
Trouvez un vecteur $\vec{w} \neq \vec{0}$ tel que $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$.

On sait que $\vec{u}\times\vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$, donc $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$ est une bonne réponse. On calcule $\vec{u}\times\vec{v}$:

$\vec{u} = [1,1,1]$ et $\vec{v} = [2,-1,3]$, donc $\vec{u}\times\vec{v} = [4,-1,-3]$.

Rép : $\vec{w} = [4,-1,-3]$.

Devoir 4 : Pondération

Question 1 : 3 points (1 point pour chaque partie).

Question 2 : 3 points (1 point pour chaque partie).

Question 3 : 5 points. Dans ma solution j'ai expliqué comment trouver les trois angles, mais ce n'est pas nécessaire de donner cette explication pour avoir tous les points. L'étudiant doit donner le triangle (celui du coin inférieur gauche de ma solution) pour avoir tous les points, sinon je vois difficilement comment il peut faire le raisonnement.

Question 4 : 4 points (1 point pour chaque partie).

Question 5 : 3 points (1 point pour chaque partie).

Question 6 : 2 points. L'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est de $130°$, et non pas $50°$. Ceux qui ont considéré que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ était de $50°$ perdent 1 point, même s'ils obtiennent la bonne réponse. Étant donné que $\sin(130°) = \sin(50°)$, ceux qui ont considéré que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ était de $50°$ devraient normalement obtenir la bonne réponse, malgré leur erreur.

Question 7 : 3 points. Ma solution est de prendre $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, mais il y a d'autres façons de résoudre cette question. Par exemple on écrit $\vec{w} = [x, y, z]$ et on cherche x, y, z satisfaisant $[1, 1, 1] \cdot [x, y, z] = 0$ et $[2, -1, 3] \cdot [x, y, z] = 0$ (donc résoudre deux équations à trois inconnues).

TOTAL : sur 23 points.