Mat 1739 Hiver 2014

Devoir 3 : à remettre le 11 mars.

Nom de famille (MAJUSCULES) SOLUTION

Prénom (MAJUSCULES) ____________________

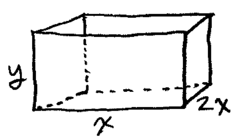
Signature ____________________

Numéro d'étudiant ____________________

Instructions: Imprimez ce questionnaire et inscrivez vos noms et numéro d'étudiant ci-dessus. Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet ci-dessous. Vous devez donner des solutions complètes (pas seulement les réponses).

Question 1 On veut construire une boîte de carton rectangulaire ayant un fond et quatre côtés, mais pas de dessus (donc cette boîte a cinq faces en carton). Le volume de la boîte doit être de $2800\,\text{cm}^3$, et le fond doit être deux fois plus long que large. Quelles doivent être les dimensions de cette boîte si on veut minimiser la quantité de carton utilisée ?

Plus précisément : si le fond mesure x cm de largeur par $2x$ cm de longueur, et si la hauteur de la boîte est de y cm, alors quelles doivent être les valeurs de x et y ?



Volume $= x \cdot 2x \cdot y = 2x^2y \implies 2x^2y = 2800 \implies \boxed{y = \dfrac{1400}{x^2}}$

Aire du carton : $A = 2x^2 + 2(2x\cdot y) + 2(x \cdot y) = 2x^2 + 6xy$,

donc $A = 2x^2 + 6x\left(\dfrac{1400}{x^2}\right) = 2x^2 + \dfrac{8400}{x}$.

$\boxed{A(x) = 2x^2 + \dfrac{8400}{x}}$, domaine : $x \in (0, \infty)$.
Trouver le minimum absolu de $A(x)$.

$A'(x) = \dfrac{4x^3 - 8400}{x^2}$

$A'(x) = 0 \iff 4x^3 = 8400 \iff x^3 = 2100 \iff x = \sqrt[3]{2100} = 12{,}8$.

x	0		12,8	
$A'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$A(x)$	$\nexists$	$\searrow$		$\nearrow$

$\implies A(x)$ a son <u>min global</u> en $x = 12{,}8$.

Alors $y = \dfrac{1400}{(12{,}8)^2} = 8{,}537 \approx 8{,}5$

Réponse : $x = 12{,}8$ cm et $y = 8{,}5$ cm.

Question 2 Soit $f(x) = x^2 + e^{4-x^2}$. Utilisez la méthode de l'intervalle fermé pour trouver les minimum et maximum absolus de cette fonction pour x dans l'intervalle $[-1, 3]$.

$$f'(x) = 2x + e^{4-x^2}(-2x) = 2x\left(1 - e^{4-x^2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad e^{4-x^2} = 1$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 4 - x^2 = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2 \quad \text{ou} \quad \underbrace{x = -2}_{\text{exclure, car } -2 \notin [-1,3]}.$$

Les valeurs de x à considérer sont $-1, 0, 2, 3$.

x	-1	0	2	3
$f(x)$	21,1	54,6	5	9,007
		max global	min global	

Minimum global en $x = 2$ (alors $f(2) = 5$).

Maximum global en $x = 0$ (alors $f(0) = e^4 \approx 54,6$)

Dans les deux questions suivantes, on vous demande de dessiner le graphe d'une fonction. Dans chaque cas, vous devez déterminer les points où le graphe coupe les axes de coordonnées, les intervalles de croissance/décroissance, les minima/maxima locaux/globaux, la concavité, les points d'inflexion et les asymptotes verticales et horizontales.

Question 3 Dessinez le graphe de la fonction $f(x) = x + \cos x$ pour $0 \leq x \leq 2\pi$.

$f(0) = 1 \Rightarrow$ le graphe coupe l'axe des Y en $(0,1)$.

On va voir ci-dessous que f est croissante partout.
Puisque $f(0) = 1 > 0$, il s'ensuit que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$, donc (pour $x \in [0, 2\pi]$) le graphe ne coupe pas l'axe des X.

Puisque f est définie et continue partout, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Puisque $\operatorname{dom} f = [0, 2\pi]$, ça n'a pas de sens de parler d'asymptote horizontale.

Donc il n'y a aucune asymptote, ni verticale ni horizontale.

$f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ pour tout x

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (on se restreint à $x \in [0, 2\pi]$).

$f''(x) = -\cos x$

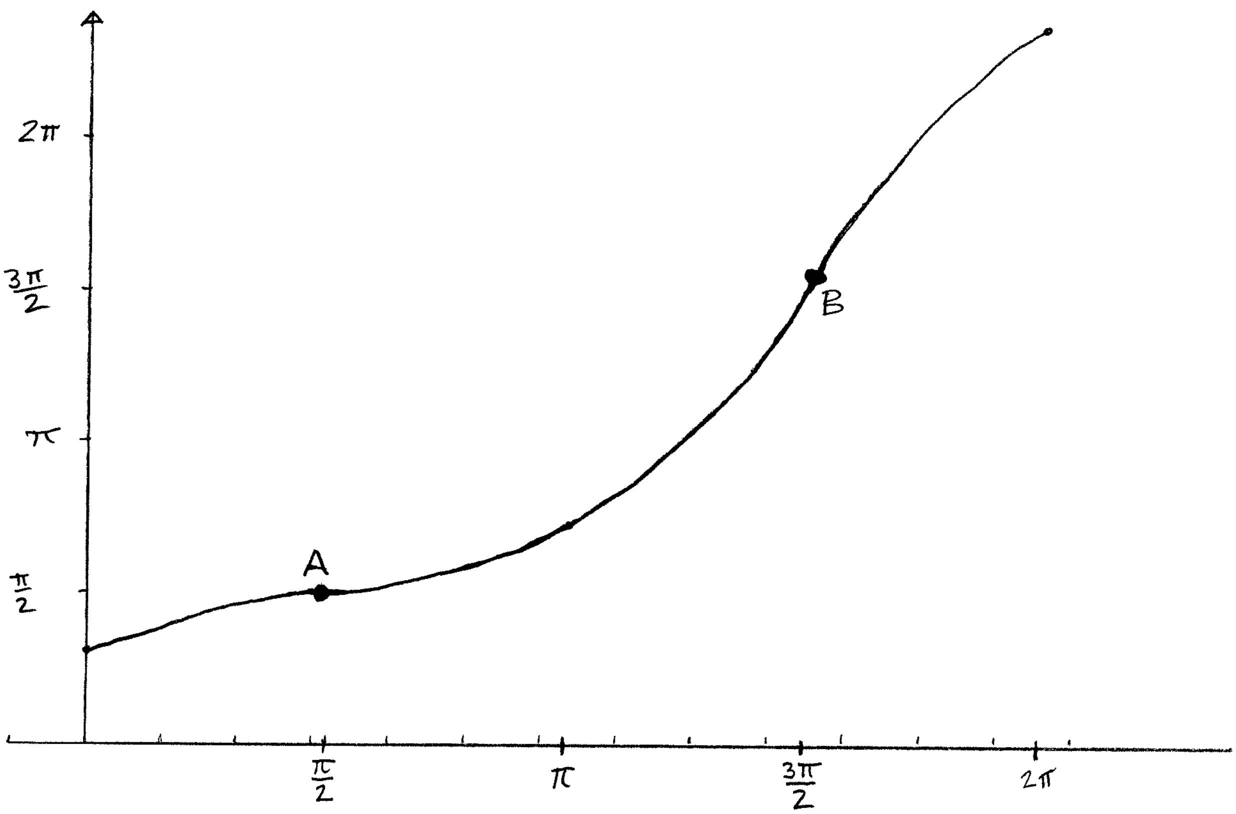
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \; x = \frac{3\pi}{2}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	flex	$\nearrow$	flex	$\nearrow$	

$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2}$; $A = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ est un pt d'inflexion.

$f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}$; $B = (\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ est un pt d'inflexion.

$f'(\pi/2) = 0$ mais A n'est pas un extremum local.



Question 4 Dessinez le graphe de la fonction $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2$ (domaine $= \mathbb{R}$).

$f(0) = 0 \Rightarrow$ le graphe intersecte l'axe des Y en $(0,0)$.

$f(x) = x^2(x^2 - 6x + 10)$ et $x^2 - 6x + 10 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $x = 0$ est le seul zéro de f. $\Rightarrow$ le graphe touche à l'axe des x seulement au point $(0,0)$.

f est continue en tout point de $\mathbb{R} \Rightarrow$ pas d'asymptote verticale.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ pas d'asymptote horizontale.

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 20x = 4x\left(x^2 - \tfrac{9}{2}x + 5\right) = 4x(x-2)\left(x - \tfrac{5}{2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0,\ 2,\ 5/2 .$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 20 = 12\left(x^2 - 3x + \tfrac{5}{3}\right) = 12(x-\alpha)(x-\beta)$$

où $\alpha = \dfrac{3 - \sqrt{7/3}}{2} = 0{,}736$, $\beta = \dfrac{3 + \sqrt{7/3}}{2} = 2{,}264$

x		0		α		2		β		$5/2$	
$4x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-5/2$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x-\alpha$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-\beta$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
	↘		↗		↗		↘		↘		↗
	∪		∪		∩		∩		∪		∪
		min		flex		max		flex		min	

Min. global : $A = (0, 0)$

Pt. d'inflexion : $B = (\alpha, f(\alpha)) = (0.736, 3.32)$

Max. local : $C = (2, f(2)) = (2, 8)$

Pt d'inflexion : $D = (\beta, f(\beta)) = (2.264, 7.90)$

Min. local : $E = (5/2, f(5/2)) = (5/2, 7.81)$