

Mat 1739 hiver 2014

Devoir 2 : à remettre le 25 février, au début du cours.

Nom de famille (MAJUSCULES) _____

Prénom (MAJUSCULES) _____

Signature _____

Numéro d'étudiant _____

Instructions: Imprimez ce questionnaire et inscrivez vos noms et numéro d'étudiant ci-dessus. Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet ci-dessous. Vous devez donner des solutions complètes (pas seulement les réponses). Je vous suggère de lire les remarques sur la deuxième page du plan de cours.

(1) Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes. Ne simplifiez pas votre réponse.

(a) $f(x) = x^2 \sin(x) \cos(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{d}{dx}(x^2) \right] \sin(x) \cos(x) + x^2 \left[\frac{d}{dx}(\sin(x)) \right] \cos(x) + x^2 \sin(x) \left[\frac{d}{dx}(\cos(x)) \right] \\ &= 2x \sin(x) \cos(x) + x^2 \cos^2(x) - x^2 \sin^2(x) \end{aligned}$$

(b) $f(x) = x^2 + (x + \sqrt{1+x^2})^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}((x + \sqrt{1+x^2})^4) = 2x + 4(x + \sqrt{1+x^2})^3 \frac{d}{dx}(x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= 2x + 4(x + \sqrt{1+x^2})^3 \left(1 + \frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}\right) = 2x + 4(x + \sqrt{1+x^2})^3 \left(1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \frac{d}{dx}(1+x^2)\right) \\ &= 2x + 4(x + \sqrt{1+x^2})^3 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \frac{\cos^3(x)}{3 + \sin^7(x)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[\frac{d}{dx}(\cos^3(x)) \right] (3 + \sin^7(x)) - \cos^3(x) \frac{d}{dx}(3 + \sin^7(x))}{(3 + \sin^7(x))^2} \\ &= \frac{[3 \cos^2(x)(-\sin(x))](3 + \sin^7(x)) - \cos^3(x) [7 \sin^6(x) \cos(x)]}{(3 + \sin^7(x))^2} \\ &= \frac{-3 \cos^2(x) \sin(x)(3 + \sin^7(x)) - 7 \cos^4(x) \sin^6(x)}{(3 + \sin^7(x))^2} \end{aligned}$$

(d) $f(x) = \sin(3 + \sin(7 + \cos(x)))$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(3 + \sin(7 + \cos(x))) \frac{d}{dx}(3 + \sin(7 + \cos(x))) = \cos(3 + \sin(7 + \cos(x))) \frac{d}{dx} \sin(7 + \cos(x)) \\ &= \cos(3 + \sin(7 + \cos(x))) \cos(7 + \cos(x)) \frac{d}{dx}(7 + \cos(x)) \\ &= \cos(3 + \sin(7 + \cos(x))) \cos(7 + \cos(x))(-\sin(x)) \end{aligned}$$

$$(e) f(x) = e^x + e^{-x} - \ln(5)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^{-x}) - \frac{d}{dx}(\ln(5)) = \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^{-x}) = e^x + e^{-x} \frac{d}{dx}(-x) = e^x - e^{-x}$$

$$(f) f(x) = e^{-x} \sin(x)$$

$$f'(x) = \left[\frac{d}{dx}(e^{-x}) \right] \sin(x) + e^{-x} \frac{d}{dx}(\sin(x)) = -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x)$$

$$(g) f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \frac{\left[\frac{d}{dx}(x+1)\right](x-1) - (x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

(2) Soit $f(x) = u(v(x))$, où u et v sont des fonctions satisfaisant :

$$\begin{array}{cccc} u(2) = 2 & u'(2) = 5 & v(2) = 3 & v'(2) = 3 \\ u(3) = 5 & u'(3) = 3 & v(3) = 2 & v'(3) = 5 \\ u(5) = 3 & u'(5) = 2 & v(5) = 5 & v'(5) = 2 \end{array}$$

Calculez $f'(2)$ et $f'(5)$.

On a $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$, donc :

$$f'(2) = u'(v(2)) \cdot v'(2) = u'(3) \cdot v'(2) = 3 \cdot 3 = 9$$

et

$$f'(5) = u'(v(5)) \cdot v'(5) = u'(5) \cdot v'(5) = 2 \cdot 2 = 4.$$

(3) Soit g une fonction telle que $g'(s) = \frac{1}{\sqrt{s^4 + 1}}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Calculez la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x) = g(x^2 + 3x + 1)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x^2 + 3x + 1) \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 1) = g'(x^2 + 3x + 1) \cdot (2x + 3) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 3x + 1)^4 + 1}} \cdot (2x + 3) \\ &= \frac{2x + 3}{\sqrt{(x^2 + 3x + 1)^4 + 1}} \end{aligned}$$

(4) Soit $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$.

(a) Donnez l'équation de la droite tangente au graphe de f au point $(0, 1)$ (commencez par vérifier que ce point appartient bien au graphe de f).

(b) Trouvez tous les points $P = (a, f(a))$ du graphe de f qui satisfont la condition :

“la droite tangente au graphe de f en P est horizontale.”

En fait il y a deux tels points P . Trouvez-les.

(c) Existe-t-il un point Q du graphe de f satisfaisant la condition

“la droite tangente au graphe de f en Q a une pente égale à -6 .”

Si un tel point existe, trouvez-le. S'il n'existe pas, expliquez comment vous savez qu'il n'existe pas.

(a) On a $f(0) = 1$, donc $(0, 1) = (0, f(0))$ appartient au graphe de f . Soit \mathcal{D} la droite tangente au graphe de f au point $(0, 1)$. Alors la pente de \mathcal{D} est égale à $f'(0)$. Comme

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36,$$

on a $f'(0) = 36$, donc l'équation de \mathcal{D} est $y = 36x + b$ où b est un nombre réel dont on doit déterminer la valeur. Puisque $(0, 1) \in \mathcal{D}$, on a $1 = 36 \cdot 0 + b$, donc $b = 1$. Ainsi, l'équation de \mathcal{D} est

$$y = 36x + 1.$$

(b) La pente de la droite tangente au graphe de f au point $P = (a, f(a))$ est égale à $f'(a)$. Donc la condition

“la droite tangente au graphe de f en $P = (a, f(a))$ est horizontale”

est équivalente à la condition $f'(a) = 0$. Donc la question (b) est équivalente à :

Trouvez tous les points $P = (a, f(a))$ du graphe de f qui satisfont $f'(a) = 0$.

Puisque

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 2)(x - 3),$$

on voit que $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = 3$. Puisque $f(2) = 29$ et $f(3) = 28$, la réponse est : $(2, 29)$ et $(3, 28)$.

(c) Si un tel point $Q = (b, f(b))$ existe alors $f'(b) = -6$. Donc, pour montrer que Q n'existe pas, il suffit de montrer que l'équation

$$f'(x) = -6$$

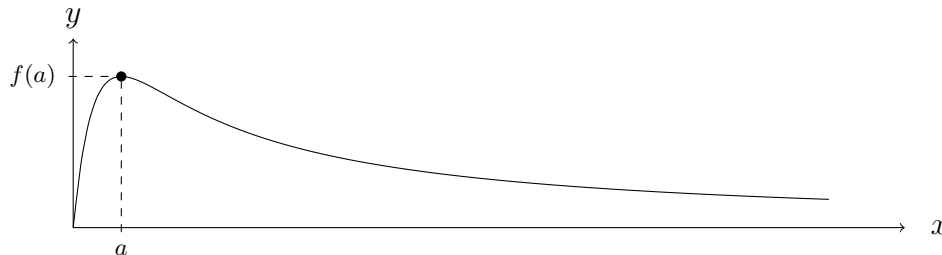
n'a aucune solution. Or,

$$f'(x) = -6 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 36 = -6 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = 0$$

et l'équation $x^2 - 5x + 7 = 0$ n'a aucune solution. Donc le point Q n'existe pas.

(5) Soit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right)$, définie pour tout $x \in [0, \infty)$.

Voici à quoi ressemble le graphe de f :



Trouvez la valeur du nombre a , ainsi que celle de $f(a)$.

Solution. La question revient à demander : trouvez le nombre $a > 0$ tel que $f'(a) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) \cdot \left(\frac{-\pi \frac{d}{dx}(\pi x + 1)}{(\pi x + 1)^2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) \cdot \left(\frac{-\pi^2}{(\pi x + 1)^2}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{-\pi^2}{(\pi x + 1)^2} \neq 0$ pour tout x , on a donc

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{\pi x + 1}\right) = 0.$$

De plus, le nombre $\frac{\pi}{\pi x + 1}$ appartient à l'intervalle $(0, \pi]$ puisque :

$$x \geq 0 \Rightarrow \pi x + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\pi x + 1} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{\pi x + 1} \leq \pi.$$

Or, le seul nombre θ appartenant à $(0, \pi]$ et satisfaisant $\cos(\theta) = 0$ est $\theta = \pi/2$. On en déduit :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{\pi x + 1} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1/\pi.$$

On a trouvé le nombre a qu'on cherchait :

$$a = 1/\pi.$$

Enfin,

$$f(a) = f(1/\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{\pi(1/\pi) + 1}\right) = \sin(\pi/2) = 1.$$

Barème.

Question 1 sur 14 points (2 pts par partie).

Question 2 sur 4 points (2 pts par partie).

Question 3 sur 2 points.

Question 4 sur 10 points ((a) sur 3 pts, (b) sur 4 pts, (c) sur 3 pts).

Question 5 : **ne pas corriger.**

Total : 30 points.