Mat 1739 hiver 2014

Solution du devoir 1

Nom de famille (MAJUSCULES)	______________________
Prénom (MAJUSCULES)	______________________
Signature	______________________
Numéro d'étudiant	______________________

Instructions: Imprimez ce questionnaire et inscrivez vos noms et numéro d'étudiant ci-dessus. Répondez à toutes les questions dans les espaces prévus à cet effet ci-dessous. Vous devez donner des solutions complètes (pas seulement les réponses). Je vous suggère de lire les remarques sur la deuxième page du plan de cours.

Question 1. (a) La table suivante donne la population d'une ville entre les années 2000 et 2010 :

Year	Population
2000	753 612
2001	754 806
2002	756 124
2003	758 070
2004	759 980
2005	761 246
2006	763 573
2007	765 667
2008	770 100
2009	772 675
2010	775 214

Quel est le taux de variation moyen de la population, de 2000 à 2004 ?

Solution :

$$\frac{759\,980 - 753\,612}{2004 - 2000} = 1592 \text{ personnes par année.}$$

(b) Supposons que $V(t) = t^2 - t$ est le volume d'eau au temps t (volume en litres, temps en secondes), dans un certain réservoir. Quel est le taux de variation moyen du volume d'eau, dans l'intervalle $1 \leq t \leq 1{,}2$?

Solution :

$$\frac{V(1{,}2) - V(1)}{1{,}2 - 1} = \frac{0{,}24}{0{,}2} = 1{,}2\,\ell/\text{sec}$$

Question 2. Trouvez le domaine, les zéros et le signe de la fonction $f(x) = \dfrac{(1-x)(x^2-2x-35)}{(x-2)}$.

Solution.

Le domaine de f est : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)(x^2-2x-35) = 0 \Leftrightarrow (1-x)(x-7)(x+5) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 7$ ou $x = -5$.

Donc les zéros de f sont : $x = 1$, $x = 7$, $x = -5$.

Les nombres -5, 1, 2 et 7 divisent la droite réelle en cinq intervalles, et le signe de f est constant sur chacun de ces intervalles.

$$f(x) = \frac{(1-x)(x+5)(x-7)}{(x-2)}$$

x		-5		1		2		7	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

Donc :

$f(x) < 0$ pour tout $x \in (-\infty, -5)$

$f(x) > 0$ pour tout $x \in (-5, 1)$

$f(x) < 0$ pour tout $x \in (1, 2)$

$f(x) > 0$ pour tout $x \in (2, 7)$

$f(x) < 0$ pour tout $x \in (7, \infty)$

Question 3. Soit $V(t)$ le volume d'eau au temps t dans un certain réservoir (le volume en litres, le temps en heures). Supposons qu'il y a $100\,\ell$ d'eau dans le réservoir au temps $t = 0$, et que le volume d'eau diminue de façon continue en obéissant à la règle suivante :

> Si le volume est égal à Q à un certain moment, alors il sera égal à $\frac{1}{2}Q$ 2,3 heures plus tard.

(a) Trouvez une formule pour $V(t)$. (Indice : ça concerne les fonctions exponentielles, et la question est similaire à celles (vues en classe ou au DGD) concernant les populations de bactéries ou la valeur d'une voiture.)
(b) Quelle sera le volume d'eau lorsque $t = 2$ heures ?
(c) À quel moment le volume d'eau sera-t-il égal à $20\,\ell$?

Solution.

(a) Après n périodes de 2,3 heures, le volume est de $100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ litres.

Le nombre n de périodes de 2,3 heures qui se sont écoulées entre le temps 0 et le temps t est égal à $n = t/2{,}3$. Donc

$$V(t) = 100 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{t/2.3}$$

(b) $V(2) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2/2.3} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0.869565217} = 54{,}731\,\ell$

(c) $V(t) = 20 \implies 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2.3} = 20 \implies \left(\frac{1}{2}\right)^{t/2.3} = 0.2 \implies \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{t/2.3}\right) = \log(0.2)$

$$\implies (t/2.3)\log(1/2) = \log(0.2) \implies \frac{t}{2.3} = \frac{\log(0.2)}{\log(0.5)} \implies t = \frac{2.3\,\log(0.2)}{\log(0.5)} = 5.3404$$

Donc, lorsque $t = 5.3404\,\text{h}$ (ou encore $t = 5$ heures, 20 minutes et 25 secondes), on a $V(t) = 20\,\ell$.

Question 4.

(a) Calculez $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour $x = 34\pi/6$ (radians). N'utilisez pas la calculatrice et donnez la réponse exacte (pas une approximation décimale comme par exemple "0.688…").

(b) Soit $f(x) = \sin(1/x)$ (x en radians), de domaine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trouvez tous les zéros de f qui sont dans l'intervalle $[\frac{1}{8}, 1]$, et déterminez le signe de $f(x)$ pour tout x dans le même intervalle.

(a) $\frac{34\pi}{6} = \frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$

$\cos(6\pi - x) = \cos((-x) + 6\pi) = \cos(-x) = \cos(x)$, donc en posant $x = \pi/3$ on obtient

$$\cos(\frac{34\pi}{6}) = \cos(6\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(\pi/3) = 1/2.$$

$\sin(6\pi - x) = \sin((-x) + 6\pi) = \sin(-x) = -\sin(x)$, donc

$$\sin(\frac{34\pi}{6}) = \sin(6\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin(\pi/3) = -\sqrt{3}/2.$$

(b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(1/x) = 0 \Leftrightarrow 1/x = n\pi$ (où $n \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow x = \frac{1}{n\pi}$.

Parmi les nombres $\pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \ldots,$ ceux qui sont dans l'intervalle $[\frac{1}{8}, 1]$ sont $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{1}{2\pi}$.

Ainsi, les zéros de f dans $[\frac{1}{8}, 1]$ sont $x = \frac{1}{\pi}$ et $x = \frac{1}{2\pi}$.

On veut maintenant déterminer le signe de $f(x)$ dans chacun des intervalles

$$[\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{2\pi}), \quad (\tfrac{1}{2\pi}, \tfrac{1}{\pi}), \quad (\tfrac{1}{\pi}, 1].$$

Il y a plusieurs méthodes pour trouver le signe de $f(x)$. En voici deux.

1e méthode. On choisit un $x \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{2\pi})$, par exemple $x = \frac{1}{7}$. Comme $f(\frac{1}{7}) = \sin(7) = 0.657 > 0$, et comme f ne change pas de signe dans $[\frac{1}{8}, \frac{1}{2\pi})$, $f(x)$ est positive pour tout $x \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{2\pi})$.

2e méthode. Si $x \in (\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi})$ alors $\frac{1}{\pi} > x > \frac{1}{2\pi}$, donc $\pi < \frac{1}{x} < 2\pi$, donc $\sin(1/x) < 0$ (car $\sin(t) < 0$ pour tout t tel que $\pi < t < 2\pi$), donc $f(x) < 0$.

Par l'une ou l'autre méthode, on trouve que $f(x) > 0$ pour tout $x \in (\frac{1}{\pi}, 1]$.

Question 5. Considérez la fonction $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x}, & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

dont le domaine est $\mathbb{R}$ (comme toujours, x est en radians).

(a) Utilisez un tableau de nombres (et la calculatrice) pour évaluer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(b) Utilisez un tableau de nombres (et la calculatrice) pour évaluer $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

(c) f est-elle continue en $x = 0$? (Répondez par oui ou non, et justifiez votre réponse.)

Solution.

(a) et (b):

x	$f(x)$
0.01	$0.004999958\ldots$
0.001	$0.000499999\ldots$
0.0001	$0.00005000\ldots$
0.00001	$0.00000500\ldots$

x	$f(x)$
-0.01	$-0.004999958\ldots$
-0.001	$-0.000499999\ldots$
-0.0001	$-0.00005000\ldots$
-0.00001	$-0.00000500\ldots$

(a) Le premier tableau suggère que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

(b) Le deuxième tableau suggère que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

(c) En tenant compte de (a) et (b) et du fait que $f(0) = 0$, on voit que :

(i) f est définie en $x = 0$;

(ii) les limites $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ existent, et sont toutes deux égales au nombre $f(0)$.

Puisque les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, f est continue en $x = 0$.

Question 6. Considérez la fonction $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$
dont le domaine est $\mathbb{R}$.

(a) Utilisez un tableau de nombres (et la calculatrice) pour évaluer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
(b) Utilisez un tableau de nombres (et la calculatrice) pour évaluer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.
(c) f est-elle continue en $x = 0$? (Répondez par oui ou non, et justifiez votre réponse.)

Solution.
(a) et (b):

x	$f(x)$
0.01	1
0.001	1
0.0001	1
0.00001	1

x	$f(x)$
-0.01	-1
-0.001	-1
-0.0001	-1
-0.00001	-1

(a) Le premier tableau suggère que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

(b) Le deuxième tableau suggère que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

(c) Pour que f soit continue en $x = 0$, il faudrait que :

(i) f soit définie en $x = 0$;
(ii) les limites $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ existent, et soient toutes deux égales au nombre $f(0)$.

La condition (i) est satisfaite (car $f(0) = 1$) mais (ii) ne l'est pas (car $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$).

Donc f n'est pas continue en $x = 0$.

Barème

(1) 4 points : (a) 2 points, (b) 2 points

(2) 7 points : domaine 1 point, zéros 2 points, signe 4 points

(3) 6 points : (a) 2 points, (b) 2 points, (c) 2 points

(4) 7 points :

(a) 2 points.
(b) 2 points pour les zéros, 3 points pour le signe.

(5) 6 points : (a) 2 points, (b) 2 points, (c) 2 points

(6) 6 points : (a) 2 points, (b) 2 points, (c) 2 points

Total : 36 points