Université d'Ottawa
Département de Mathématiques et de Statistique

MAT 1702B: Méthodes mathématiques II

Professeur : Abdellah Sebbar

Test 3 – le 26 mars 2013

Nom ____________________ Prénom ____________________

d'étudiant ____________________

Instructions :

(1) L'examen est d'une durée de 80 minutes.
(2) Le nombre de points pour chaque question est indiqué entre les parenthèses carrées.
(3) Vous devez tout justifier.
(4) Veuillez utiliser l'espace désigné pour écrire vos réponses. Vous pouvez utiliser le verso de chaque feuille comme papier brouillon. Par contre, ces brouillons ne seront pas considérés lors de la correction.
(5) Ecrivez votre numéro d'étudiant au haut de chaque feuille.
(6) Aucune note de cours, aucune calculatrice ni papier brouillon n'est permis.
(7) Bonne chance !

Ne pas écrire dans le tableau suivant.

Question	1	2	3	4	5	6	Total
Maximum	3	2	5	5	4	6	28
Note							

QUESTION 1. **[2 points]** Lesquels des ensembles suivants sont des sous espaces de $\mathbb{R}^n$? Vous devez indiquer *toutes* les bonnes réponses. (vous perdez de spoints pour des fausses réponses sans pour autant avoir un score négatif sur cette question).

(1) L'ensemble des solutions de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$, où A est une matrice $m \times n$ et $\vec{b}$ est un vecteur non nul dans $\mathbb{R}^m$.
(2) L'ensemble des solutions de l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$, où A est une matrice $m \times n$.
(3) L'ensemble $\{(2a - 3b, b + 7a, 8a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Ici $n = 3$.
(4) L'ensemble $\{(c + 5, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Ici $n = 2$.
(5) L'ensemble engendré par 5 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$. Ici $n = 4$.
(6) L'ensemble $\{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Ici $n = 2$.

Réponse:

Solution: (2), (3), (5)

QUESTION 2. **[2 points]** Lesquelles des propositions suivantes **ne sont pas** vraies ?

(1) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
(2) Toute matrice $n \times n$ admet au plus n valeurs propres.
(3) Si une matrice carrée A admet 0 comme valeur propre alors A est inversible.
(4) Pour toute matrice A, on a $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Ker} A$.
(5) Pour toute matrice carrée A, on a $\det A = \det A^T$.
(6) Pour tous vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ de $\mathbb{R}^n$, le sous-espace $\operatorname{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est de dimension 3.

Réponse:

Solution: (3), (4), (6)

Question 3.
Soit

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 3 & 0 \\ 8 & 11 & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) [**2 points**] Quelles sont les valeurs propres de M^2?
(2) [**1 points**] Calculer $\det M^2$.

Solution: $\det M^2 = 0$

QUESTION 4. [**2 points**] Soient A et B des matrices 3x3 avec $\det A = 2$ et $\det B = -1$. Calculer $\det(-A^2B^TA)$.

Solution: $\det(-A^2B^TA) = (-1)^3 \det(A^2)\det(B^T)\det A = -\det(A)^2 \det B \det A = 8$.

QUESTION 5. [**2 points**] On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Supposons que $\det A = 4$. Calculer $\det B$ où

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d-5a & e-5b & f-5c \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

Solution: $\det B = 12$

Question 6. [**5 points**] Calculer le déterminant de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -7 & -1 \\ -4 & 6 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution: On développe le long de la 5eme ligne pour obtenir

$$\det A = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Après, on développe le long de la 3eme colonne pour obtenir

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Puis On développe le long de la 2eme ligne pour obtenir

$$\begin{aligned} \det A &= -2 \left(-2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) \\ &= 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 4(2 \cdot 1 - (-2)3) - 2(1(-2) - 3 \cdot 2) \\ &= 4(8) - 2(-8) = 6 \cdot 8 = 48. \end{aligned}$$

QUESTION 7. [**6 points**] Les valeurs propres de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

sont 1 et 5. Trouver des bases des espaces propres correspondants $\mathrm{Ker}\,(A-I)$ et $\mathrm{Ker}\,(A-5I)$.

Espace additionel pour Question 7.

Solution: Pour la valeur propre 1, on doit trouver une base de Ker $A - I$. On réduit

$$\left[\begin{array}{c|c} A-I & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-L_1+L_3]{-2L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La solution générale est:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - x_3 \\ x_2, x_3 &\text{ free} \end{aligned}$$

En forme paramétrique, l'ensemble des solutions est:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ains, une base du sous-espace propre associé à la valeur propore 1 est:

$$\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}.$$

Pour la valeur propre 5, on doit trouver une base de Ker $A - 5I$. On réduit

$$\left[\begin{array}{c|c} A-5I & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{3}L_1+L_3]{\frac{2}{3}L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{4}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solution générale est:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= 2x_3 \\ x_3 &\text{ free} \end{aligned}$$

En forme paramétrique, l'ensemble des solutions est:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ains, une base du sous-espace propre associé à la valeur propore 5 est:

$$\{(1,2,1)\}.$$

QUESTION 8. [**6 points**] On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -24 & -8 & -9 \\ 2 & 1 & 8 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

et sa forme échelonnée réduite:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Trouver une base de Ker A

Solution: En utilisant la forme échelonnée réduite on trouve que la solution générale est

$$\begin{cases} x_1 & = -3x_3 - x_4 \\ x_2 & = -2x_3 - 2x_4 \\ x_3 & \text{libre} \\ x_4 & \text{libre} \\ x_5 & = 0 \end{cases}$$

La solution du système homogène sous forme vectorielle est :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc une base du noyau de A est

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(2) Trouver la dimension de Ker A.

Solution: dim Ker A=2.

(3) Trouver une base de Im A.

Solution: La première, la seconde et la dernière colonnes sont les colonnes pivots et donc forment une base de $\operatorname{Im} A$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(4) Trouver le rang de A.

Solution: $\operatorname{rg} A = 3$

Cette page est dédiée à vos brouillons.