MAT 1748 - Solution du Devoir #3

Question 1 Par induction simple.

① **Étape de Base** $n=0$ $\quad n^5 - n = 0$: divisible par 5.

② **Étape inductive** soit $n \geq 0$

(i) **Hypothèse d'induction** supposons que $n^5 - n = 5k$; $k \in \mathbb{N}$

(ii) **Conclusion** À montrer : $(n+1)^5 - (n+1)$ est divisible par 5.

$$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1$$
$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n$$
$$= (n+5k) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n \quad \text{(par hypothèse d'induction)}$$
$$= 5\left[n + k + n^4 + 2n^3 + 2n^2\right] \text{ : divisible par 5}$$

Par le principe d'induction, $n^5 - n$ est divisible par 5 $\forall n \geq 0$.

Question 2 Par induction simple

① **Étape de Base** $n=0$ $\quad 2^{2n+2} + 5^{2n+1} = 9$: divisible par 3

② **Étape inductive** soit $n \geq 0$

(i) **Hypothèse d'induction** supposons que $2^{2n+2} + 5^{2n+1} = 3k$; $k \in \mathbb{N}$

(ii) **Conclusion** À montrer que $2^{2(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1}$ est divisible par 3.

$$2^{2(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1} = 2^{2n+4} + 5^{2n+3} = 4\,2^{(2n+2)} + 25 \cdot 5^{(2n+1)}$$
$$= 4\left[3k - 5^{(2n+1)}\right] + 25 \cdot (5^{2n+1}) = 12k + 21(5^{2n+1})$$
$$= 3\left[4k + 7\,5^{(2n+1)}\right] \text{ : divisible par 3.}$$

Par le principe d'induction, $2^{2n+2} + 5^{2n+1}$ est divisible par 3 $\forall n \geq 0$.

<u>Question 3</u> Par induction généralisée :

① <u>Étape de Base</u> $\underline{n=14}$ $14 = 3+3+8$ ✓

$\underline{n=15}$ $15 = 3+3+3+3+3$ ✓

$\underline{n=16}$ $16 = 8+8$ ✓

② <u>Étape inductive</u> Supposons $n \geq 16$

(i) <u>Hypothèse d'induction</u> Si $14 \leq k \leq n$, alors k est une somme de 3 et/ou de 8

(ii) <u>Conclusion</u> À montrer que $n+1$ est une somme de 3 et/ou de 8.

$n+1 = (n-2)+3$. Comme $n \geq 16$, on a que $n-2 \geq 14$
$\Rightarrow$ $14 \leq n-2 \leq n$. Par hypothèse d'induction, $n-2$ est une somme de 3 et/ou de 8. Alors $n+1 = (n-2)+3$ est une somme de 3 et/ou de 8.

Par le principe d'induction, tout entier ≥ 14 peut s'écrire comme une somme de 3 et/ou de 8.

Question 4 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$

① Étape de Base $n=0$ $a_0 = 0, \; 3^n - 2^n = 1-1 = 0$ ✓

$n=1$ $a_1 = 1, \; 3^1 - 2^1 = 1$ ✓

② Étape inductive Supposons $n \geq 1$

(i) Hypothèse d'induction supposons que $a_k = 3^k - 2^k$ pour tout entier k; $0 \leq k \leq n$

(ii) Conclusion À montrer que $a_{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} = 5[3^n - 2^n] - 6[3^{n-1} - 2^{n-1}]$ (par hypothèse d'induction) $= 5.3^n - 5.2^n - 6.3^{n-1} + 6.2^{n-1}$

$\Rightarrow a_{n+1} = 5.3^n - 5.2^n - 2.3^n + 3.2^n = 3.3^n - 2.2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

Par le principe d'induction, on a alors que

$a_n = 3^n - 2^n \quad \forall n \geq 0.$