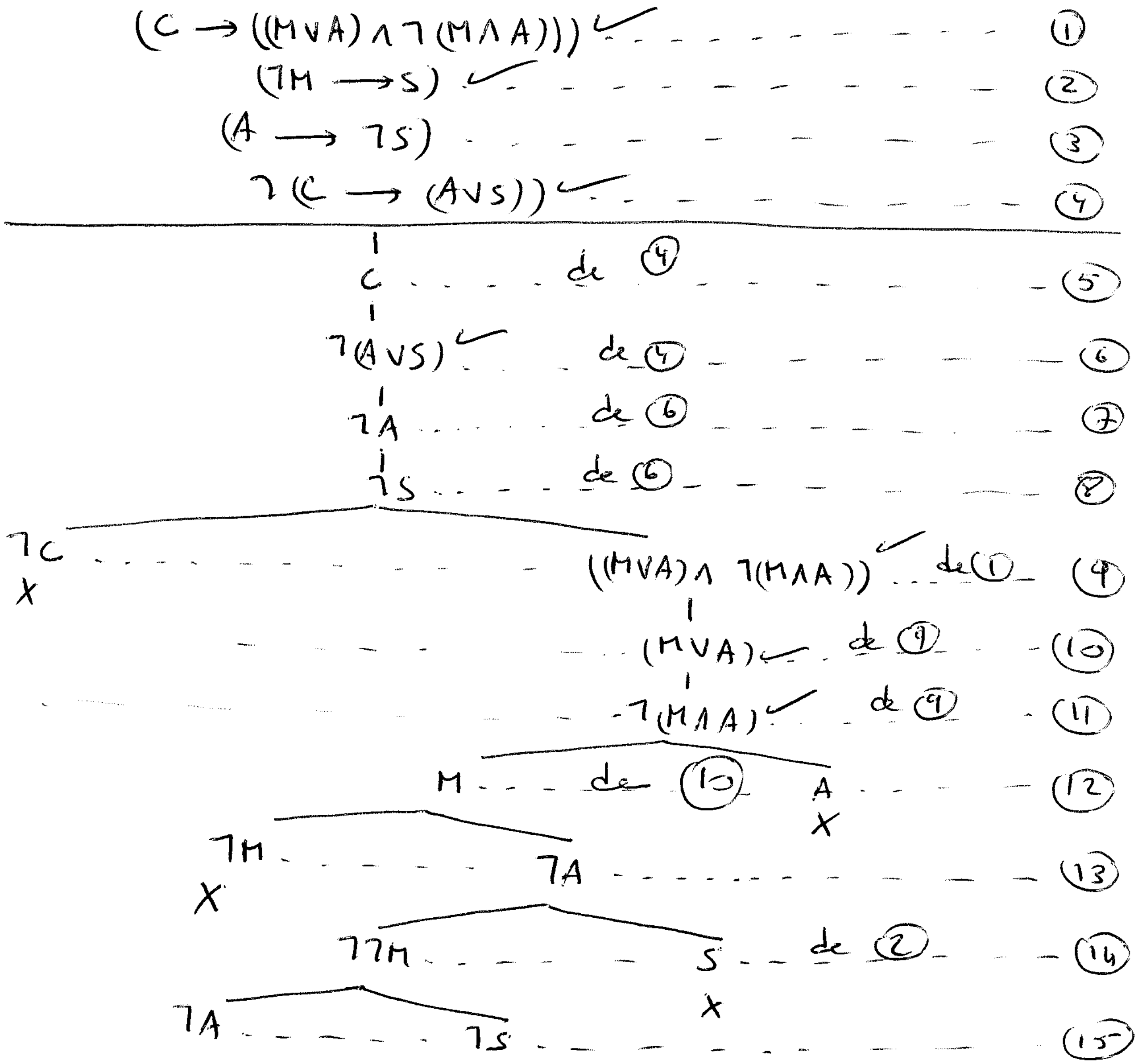
MAT 1748_ Solutions du Devoir #2

Question 1 (a) La Traduction de l'argument en logique est:

$$\begin{array}{c} (C \to ((M \vee A) \wedge \neg(M \wedge A))) \\ (\neg M \to S) \\ (A \to \neg S) \\ \hline (C \to (A \vee S)) \end{array}$$

(b) Utilisant un arbre de vérité pour la validité de cet argument:



Il y a des branches ouvertes. L'argument n'est pas valide.

C	M	A	S
V	V	F	F

est un contre-exemple

Question 2 Considérer les 3 atomes :

X : « B est coupable », Y : « B est un Coquin », Z : « A est un Coquin »

Alors les phrases prononcées par A et B sont :

A : $(X \rightarrow Y)$, B : $(\neg X \leftrightarrow Z)$

Considérons les 2 Cas suivants :

Cas 1 **A Coquin** Dans ce cas, $v(X \rightarrow Y) = F$. Alors $v(X) = V$ et $v(Y) = F$. Alors B est Coupable et B est chevalier. Donc B dit la vérité. Donc $v(\neg X \leftrightarrow Z) = V$. Comme $v(Z) = V$ dans ce cas, on doit avoir que $v(\neg X) = V$; Contradiction. Ce Cas n'est pas possible.

Cas 2 **A chevalier** Dans ce cas, $v(X \rightarrow Y) = V$. Envisageons alors les sous-cas possibles suivants :

Cas 2.1 **$v(X) = F$ et $v(Y) = F$** Alors B est innocent et B est un chevalier. Donc B dit la vérité, alors $v(\neg X \leftrightarrow Z) = V$. Mais $v(\neg X) = V$ et $v(Z) = F$, donc $v(\neg X \leftrightarrow Z) = F$: une contradiction.

Cas 2.2 **$v(X) = V$ et $v(Y) = V$** Dans ce cas B est un coquin, donc il ment. Comme $v(Z) = F$, $v(\neg X) = V$ car $v(\neg X \leftrightarrow Z) = F$.
Mais $v(X) = V$: Contradiction.

Cas 2.3 **$v(X) = F$ et $v(Y) = V$** Dans ce cas B est un coquin, donc il ment et alors $v(\neg X \leftrightarrow Z) = F \Rightarrow v(\neg X) = V \Rightarrow v(X) = F \Rightarrow$ B est innocent. Pas de Contradiction dans ce cas.

Alors A est un chevalier, B Coquin et il est innocent

Question 3 (1) on considère les lignes dans le tableau où $v(p) = V$. chacune de ces lignes nous donne une clause conjonctive.

$p \equiv ((A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C))$; FND

(2) $((\neg C \to B) \to (A \to \neg C))$

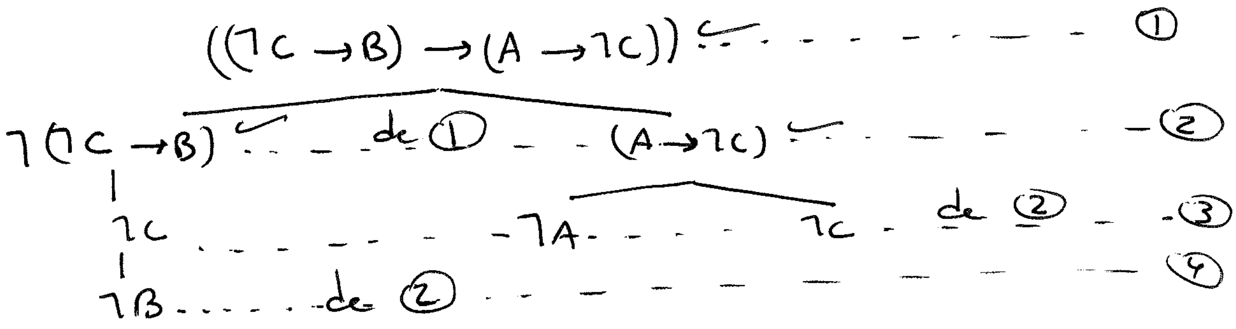
(i) Table de vérité

A	B	C	$\neg C$	$(\neg C \to B)$	$(A \to \neg C)$	$((\neg C \to B) \to (A \to \neg C))$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V

une FND équivalente à la formule est

$((A \land B \land \neg C) \lor (A \land \neg B \land \neg C) \lor (\neg A \land B \land C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land \neg B \land \neg C))$

(ii) Avec un arbre de vérité :



une FND équivalente est alors $((\neg B \land \neg C) \lor \neg A \lor \neg C)$

(iii) Avec des manipulations algébriques :

$((\neg C \to B) \to (A \to \neg C)) \equiv (\neg(\neg C \to B) \lor (A \to \neg C)) \equiv$

$((\neg C \land \neg B) \lor \neg A \lor \neg C)$; FND équivalente.

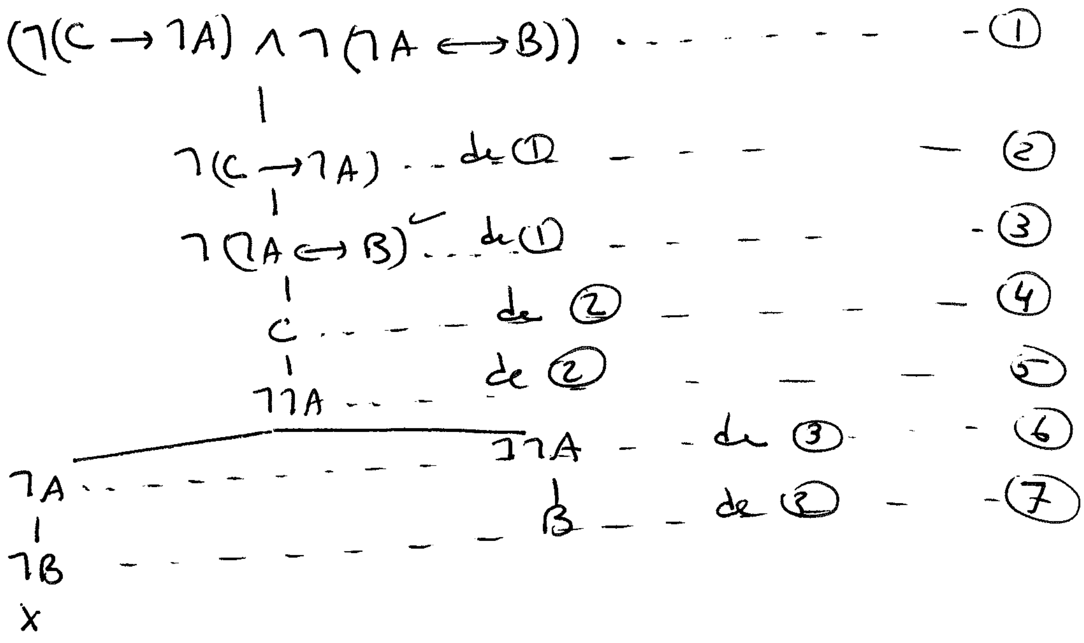
2) $(\neg(C \to \neg A) \wedge \neg(\neg A \leftrightarrow B))$

(i) Avec une table de vérité :

A	B	C	¬A	(C → ¬A)	¬(C → ¬A)	(¬A ↔ B)	¬(¬A ↔ B)	Formule
V	V	V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F	F	V	F

Une FND équivalente est alors $(A \wedge B \wedge C)$

(ii) Avec un arbre de vérité



Une FND équivalente est alors $(A \wedge B \wedge C)$

(iii) Avec des manipulations algébriques :

$$(\neg(C \to \neg A) \wedge \neg(\neg A \leftrightarrow B)) \equiv ((C \wedge \neg\neg A) \wedge [(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg A \wedge B)])$$

$$\equiv [(C \wedge A) \wedge (\neg A \wedge \neg B)] \vee [(C \wedge A) \wedge (A \wedge B)] \equiv$$

$$((C \wedge \underbrace{A \wedge \neg A}_{F} \wedge \neg B) \vee (C \wedge \underbrace{A \wedge A}_{A} \wedge B)) \equiv (F \vee (C \wedge A \wedge B)) \equiv$$

$$(A \wedge B \wedge C)$$

Question 4 **Théorème 1.**

Supposons que n est impair. Alors $n = 2k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Alors $n^2+5n+4 = (2k+1)^2+5(2k+1)+4 = 4k^2+4k+1+10k+5+4 = 4k^2+14k+10 = 2(2k^2+7k+5)$; pair.

Théorème 2 Soit k, $k+1$, $k+2$ 3 entiers consécutifs. Alors $k+(k+1)+(k+2) = 3k+3 = 3(k+1)$: divisible par 3

Question 5 **Théorème 1** : ($mn+1$ impair $\rightarrow$ (m pair $\vee$ n pair))

La contraposée de cette implication est

($\neg$(m pair $\vee$ n pair) $\rightarrow$ $\neg$($mn+1$ impair)) $\equiv$

((m impair $\wedge$ n impair) $\rightarrow$ $mn+1$ pair)

Supposons alors que m et n sont impairs. Alors $m = 2r+1$ et $n = 2s+1$ où $r, s \in \mathbb{Z}$. Alors

$mn+1 = (2r+1)(2s+1)+1 = 4rs+2r+2s+1+1 =$

$2(2rs+r+s+1)$: pair.

Théorème 2 (x^2 ne divise pas $a^2-b^2 \rightarrow \neg$ (x divise a $\wedge$ x divise b))

La contraposée de cette implication est

((x divise a $\wedge$ x divise b) $\rightarrow$ x^2 divise a^2-b^2)

Supposons alors que x divise a et x divise b, alors $a = \alpha x$ et $b = \beta x$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Alors $a^2-b^2 = \alpha^2x^2-\beta^2x^2 = (\alpha^2-\beta^2)x^2$. D'où x^2 divise a^2-b^2.

Question 6 (1) On fait une preuve par contradiction.

Supposons que x, y sont deux entiers positifs tels que $x^2 - y^2 = 4$.

Alors $(x-y)(x+y) = 4$. D'où $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$

- Si $x-y=1$ et $x+y=4 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$: contradiction car $x \in \mathbb{N}$
- Si $x-y = x+y = 2 \Rightarrow x=2$ et $y=0$: contradiction car $y>0$.

On conclut que des tels entiers n'existent pas.

(2) On fait une preuve cas par cas. Si $x \in \mathbb{R}$, alors il y a 3 cas possibles

Cas 1 $x \leq -5$ Dans ce cas $x+5 \leq 0$ et $x-1 \leq 0 \Rightarrow$

$$|x-1| + |x+5| = -x+1-x-5 = -2x-4 = -2(x+2) \geq -2(-5+2) = 6$$

(Notez que $x \leq -5 \Rightarrow x+2 \leq -3 \Rightarrow -2(x+2) \geq 6$)

Cas 2 $-5 < x \leq 1$ Dans ce cas $x+5 > 0$ et $x-1 \leq 0 \Rightarrow$

$$|x-1| + |x+5| = -x+1+x+5 = 6 \geq 6.$$

Cas 3 $x > 1$ Dans ce cas, $x+5 > 0$ et $x-1 > 0$. Alors

$$|x-1| + |x+5| = x-1+x+5 = 2x+4 = 2(x+2) > 2(3) = 6.$$

(Notez que $x > 1 \Rightarrow x+2 > 3 \Rightarrow 2(x+2) > 6$)

Dans tous les cas possibles, on a que

$$|x-1| + |x+5| \geq 6$$