MAT 1748 – Solutions du Devoir #1

(1) $((\neg R \to (\neg P \vee \neg Q)) \leftrightarrow (P \to (\neg Q \vee R)))$

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$(\neg P \vee \neg Q)$	$(\neg Q \vee R)$	$(\neg R \to (\neg P \vee \neg Q))$	$(P \to (\neg Q \vee R))$	$((\neg R \to (\neg P \vee \neg Q)) \leftrightarrow (P \to (\neg Q \vee R)))$
V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

La formule $((\neg R \to (\neg P \vee \neg Q)) \leftrightarrow (P \to (\neg Q \vee R)))$ est une tautologie

(2) $(\neg(X \to Y) \to (Y \to X))$

X	Y	$(X \to Y)$	$\neg(X \to Y)$	$(Y \to X)$	$(\neg(X \to Y) \to (Y \to X))$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V

La formule est une tautologie.

(3) $((\neg C \wedge \neg B) \to (A \to B))$

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$(\neg C \wedge \neg B)$	$(A \to B)$	$((\neg C \wedge \neg B) \to (A \to B))$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Formule contingente
Une seule valuation qui rend la formule fausse :

A	B	C
V	F	F

(4) $(\neg(X \to \neg Y) \leftrightarrow (\neg X \to Y))$

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$(X \to \neg Y)$	$\neg(X \to \neg Y)$	$(\neg X \to Y)$	$(\neg(X \to \neg Y) \leftrightarrow (\neg X \to Y))$
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F	V

C'est une formule contingente. Les valuations qui rendent la formule fausse sont données par le tableau suivant ②

X	Y
V	F
F	V

<u>Question 2</u>

X	Y	f	g
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Notez que $f \equiv (X \leftrightarrow \neg Y)$ et $g \equiv (X \rightarrow \neg Y)$

(a) $f \equiv (X \leftrightarrow \neg Y) \equiv ((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)) \equiv \neg(\neg(X \rightarrow Y) \vee \neg(Y \rightarrow X)) \equiv$
$\neg(\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X))$

$g \equiv (X \rightarrow \neg Y) \equiv (\neg X \vee \neg Y)$

(b) $f \equiv (X \leftrightarrow \neg Y) \equiv ((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)) \equiv \neg(\neg(X \rightarrow Y) \vee \neg(Y \rightarrow X))$
$\equiv \neg((X \rightarrow Y) \rightarrow \neg(Y \rightarrow X))$

$g \equiv (X \rightarrow \neg Y)$

<u>Question 3</u> (1) $((X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z)) \equiv (X \rightarrow (Y \vee Z))$

$((X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z)) \equiv ((\neg X \vee Y) \vee (\neg X \vee Z)) \equiv ((\neg X \vee \neg X) \vee (Y \vee Z)) \equiv$
$(\neg X \vee (Y \vee Z)) \equiv (X \rightarrow (Y \vee Z))$

(2) $f = ((A \vee \neg B) \rightarrow (C \rightarrow A))$, $g = (\neg(C \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$

A	B	C	¬A	¬B	$(A \vee \neg B)$	$(C \to A)$	f	$\neg(C \to A)$	$(\neg A \to B)$	g
V	V	V	F	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	V

même table

Comme f, g ont la même table de vérité, elles sont équivalentes.

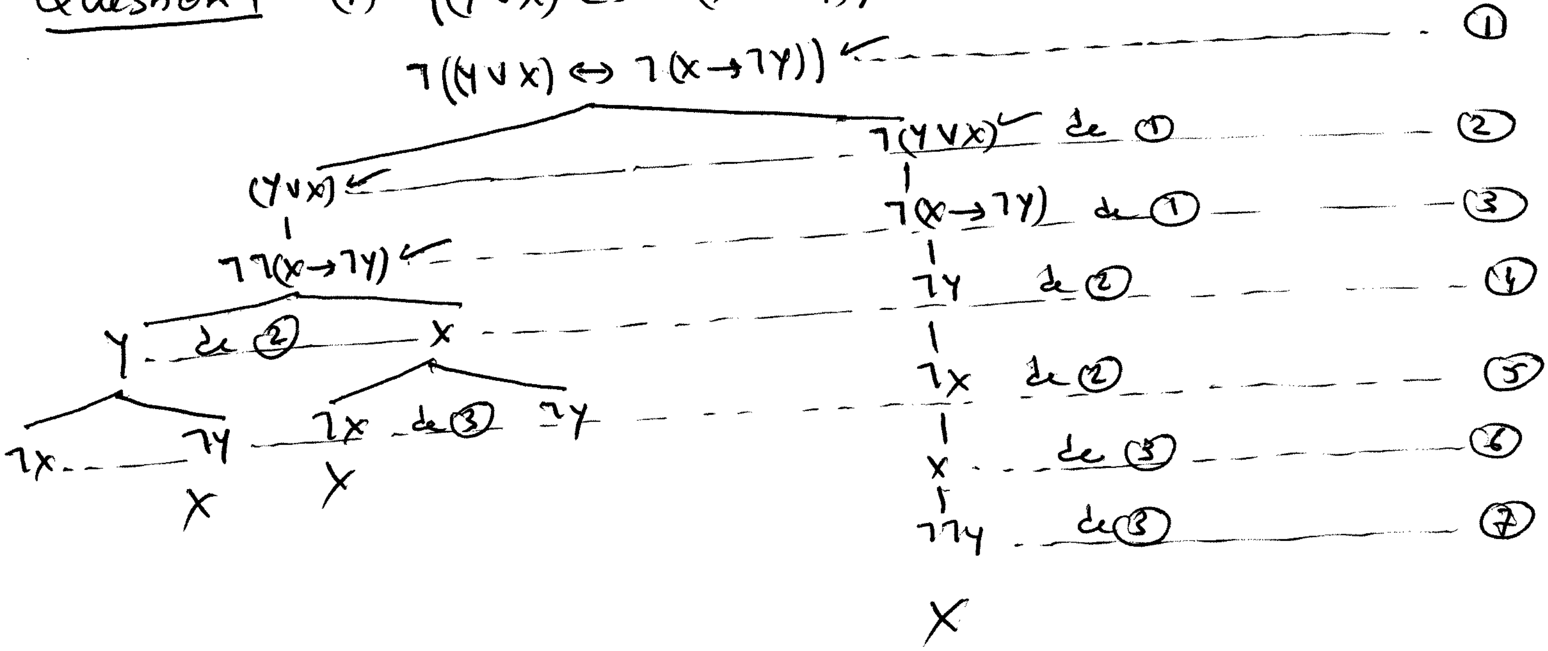
(2) $f = ((X \to Y) \wedge (\neg Y \vee X))$, $g = ((X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y))$

X	Y	¬X	¬Y	$(X \to Y)$	$(\neg Y \vee X)$	f	$(X \wedge Y)$	$(\neg X \wedge \neg Y)$	g
V	V	F	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V

même table

Alors $f \equiv g$

<u>Question 4</u> (1) $((Y \vee X) \leftrightarrow \neg(X \to \neg Y))$



Il y a des branches ouverts. La formule n'est pas une tautologie.

Chaque branche ouverte nous donne un contre-exemple :

X	Y
V	F
F	V

(2) $((P \to (Q \vee R)) \to \neg(\neg P \wedge Q))$

$\neg((P \to (Q \vee R)) \to \neg(\neg P \wedge Q))$ .... (1)

$(P \to (Q \vee R))$ de (1) .... (2)

$\neg\neg(\neg P \wedge Q)$ de (1) .... (3)

$\neg P$ de (3) .... (4)

Q de (3) .... (5)

$\neg P$ de (2) $\quad (Q \vee R)$ .... (6)

$Q \quad R$ de (6) .... (7)

Il y a des branches ouverts. La formule n'est pas une tautologie.

Des contre-exemples sont donnés par le tableau suivant

P	Q	R
F	V	V
F	V	F

(3) $\neg((A \to B) \leftrightarrow (\neg(\neg A \vee \neg B) \to (B \vee \neg C)))$ ✓ .... (1) 5

$(A \to B)$ ...... de (1) ...... $\neg(A \to B)$ ✓ ...... (2)

$\neg(\neg(\neg A \vee \neg B) \to (B \vee \neg C))$ ✓ ... de (1) ... $(\neg(\neg A \vee \neg B) \to (B \vee \neg C))$ ✓ ...... (3)

$\neg(\neg A \vee \neg B)$ ✓ de (3) ...... A de (2) ...... (4)

$\neg(B \vee \neg C)$ ✓ de (3) ...... $\neg B$ de (2) ...... (5)

$\neg\neg A$ de (4) ...... $\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ ✓ de (3) $(B \vee \neg C)$ ✓ ...... (6)

$\neg\neg B$ de (4) ...... $\neg A$ de (6) $\neg B$ ...... B de (6) $\neg C$ ...... (7)

$\neg B$ de (5) ...... X ...... X ...... (8)

$\neg\neg C$ de (5) ...... (9)

X

Il y a des branches ouvertes. La formule n'est pas une tautologie. Les contre-exemples sont donnés par le tableau :

A	B	C
V	F	V
V	F	F

<u>Question 5</u> Supposons qu'il existe une valuation pour laquelle

$v((A \wedge \neg B) \to ((\neg B \to C) \wedge (C \to \neg A))) = F$, alors

$v(A \wedge \neg B) = V$ (1) et $v((\neg B \to C) \wedge (C \to \neg A)) = F$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $v(A) = V$ (3) et $v(B) = F$ (4)

(2) $\Rightarrow$ $v(\neg B \to C) = V$ (5) et $v(C \to \neg A) = V$ (6)

(4) et (5) $\Rightarrow$ $v(C) = V$ (7)

(6) et (7) $\Rightarrow$ $v(\neg A) = V \Rightarrow v(A) = F$: Contradiction à (3)

Donc, la formule $((A \wedge \neg B) \rightarrow ((\neg B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg A)))$ est une tautologie.

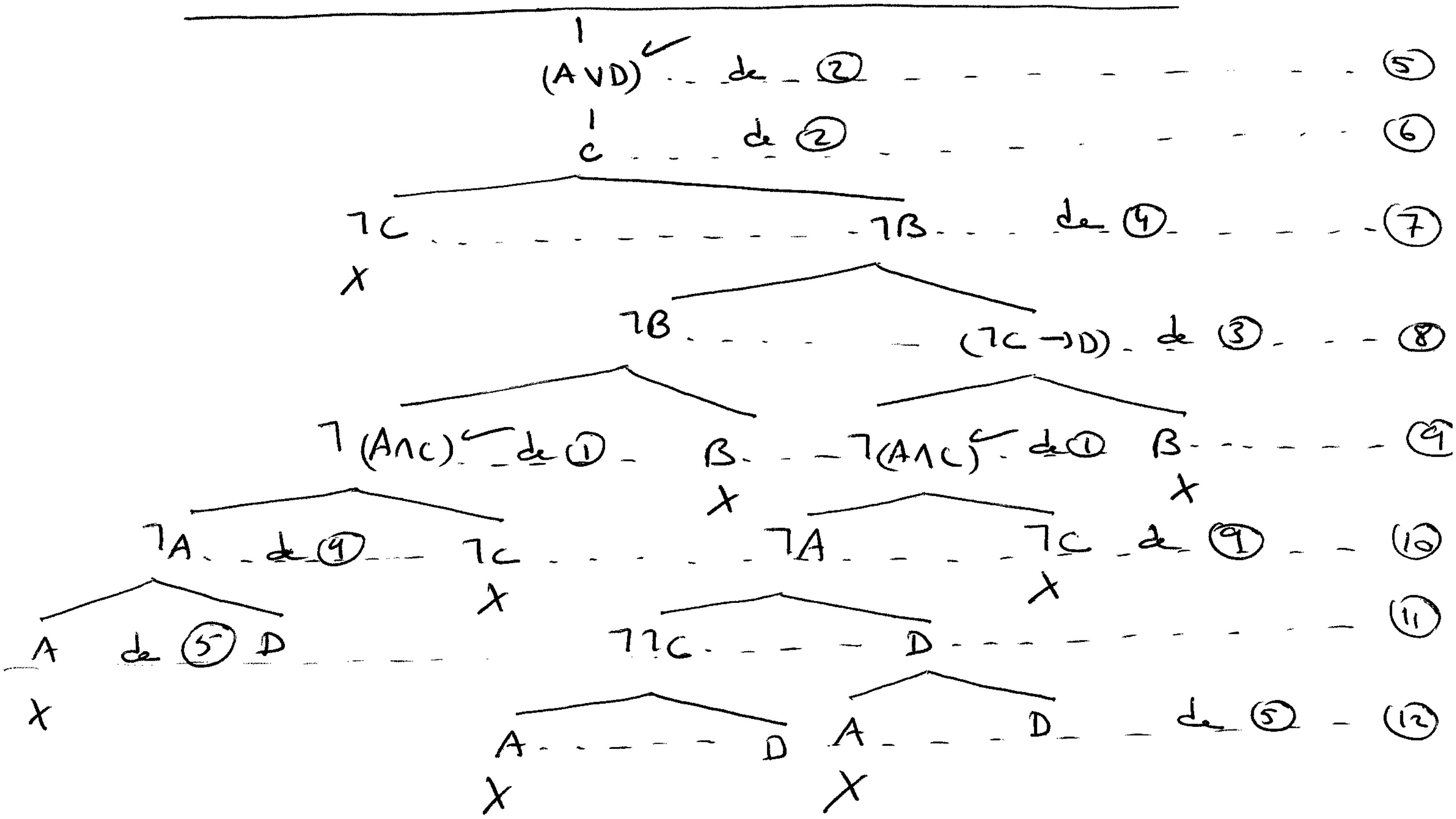
Question 6

$((A \wedge C) \rightarrow B)$ ✓ ……… (1)

$((A \vee D) \wedge C)$ ✓ ……… (2)

$(\neg B \vee (\neg C \rightarrow D))$ ✓ ……… (3)

$\neg\neg(C \rightarrow \neg B)$ ✓ ……… (4)



Il y a des branches ouvertes. l'argument n'est pas valide.

un contre-exemple est

A	B	C	D
F	F	V	V