MAT1748 – Révision

LES DIFFÉRENTS CONNECTIFS

Le connectif de conjonctions (ET) - X∧Y

X	Y	X∧Y
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Le connectif de disjonction (OU) - X∨Y

X	Y	X∨Y
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Le connectif de négation (NON) - ⌐X

X	⌐X
V	F
F	V

Le connectif d'implication - X=>Y

X	Y	X=>Y
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

***Le seul moment où l'implication est fausse est lorsque l'hypothèse (x) est vrai, et la conclusion (y) est fausse.*

Le connectif biconditionnel – X<=>Y

X	Y	X<=>Y
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

DÉFINITION DES FORMULES

Une formule est un mot qui peut être construit en respectant les règles suivantes :

1) Chaque variable porpositionnelle est une formule; les symboles V et F sont aussi des formules;
2) Si f est une formule, alors ⌐f est une formule;
3) Si f et ψ sont des formules, alors
   a. (f ∧ ψ)
   b. (f ∨ ψ)
   c. (f => ψ)
   d. (f <=> ψ)

IL EXISTE DEUX TYPES DE FORMULES :

1) Formules atomiques
   Une formule atomique s'il ne contient pas de connectif

2) Formules complexes/composées
   Une formule contenant au moins un connectif, elle peut en contenir plusieurs.
   Le connectif principal : Le connectif principal est le dernier connectif qu'on exécute.

L'ÉQUIVALENCE DE FORMULE

Deux formules sont équivalentes si elles ont la même table de valeurs.

<table>
<tr><td>X</td><td>Y</td><td>X=>Y</td><td>$\neg X \lor Y$</td><td rowspan="5">Fonction équivalente</td><td>X=>Y</td><td>Y=>X</td><td rowspan="5">Fonction non-équivalente</td></tr>
<tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
</table>

PROPRIÉTÉ D'ÉQUIVALENCES

1) Toutes formules est équivalente à elle-même;
2) Si f= ψ alors ψ=f;
3) Si f1=f2 et f2=f3 alors f1=f3;

DÉMONSTRATION D'ÉQUIVALENCE DE DEUX FORMULES

1) Comparer les deux tableaux de vérité
2) Preuve par manipulation algébrique (à partir de la liste d'équivalence p.12)
   ** Très important de ne pas sauter AUCUNES ÉTAPES sinon on perd des points.

LA TAUTOLOGIE ET LA CONTRADICTION

Tautologie : Une tautologie est une formule dont la table de vérité ne contient que des vrais.
Ψ est une tautologie si Ψ=V.

Contradiction : Une contradiction est une formule dont la table de vérité ne contient que des faux. Ψ est une contradiction si Ψ=F.

LA RÉCIPROQUE ET LA CONTRAPOSÉE

La réciproque : La réciproque de X=>Y est Y=>X.
La contraposée : La contraposée de X=>Y est $\neg$Y=>$\neg$X.

LA TRADUCTION DES FORMULES EN FRANÇAIS

$P \land Q$	$P \lor Q$	$((P \lor Q) \land \neg(P \land Q))$	$(\neg P \land \neg Q)$ ou $\neg(P \lor Q)$
P et Q P, mais Q P, bien que Q	P ou Q P ou encore Q P à moins que Q	P ou Q, mais pas les deux Ou bien P, ou bien Q Soit P, soit Q	Ni l'un, ni l'autre

LOIS DE MORGAN
Ces lois indiquent que :

$\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$

$\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$

LES VALUATIONS
Soit V un ensemble de variables propositionnelles. Une valuation de V est un choix d'une valeur pour chaque élément de V.

Par exemple : On détient l'ensemble V={x,y,z}
Alors, ce tableau ci-dessous est une valuation de V.

X	Y	Z
F	F	V

Il existe 8 valuations de cet ensemble et on doit les identifier.

Vocabulaire :
f : une formule ayant toutes les variables dans V
¶ : une valuation d'un ensemble de variables

Si ¶ détermine les valeurs de V pour f, on dit que ¶ satisfait f.

Soit E={f1, f2, f3, …}, un semble de formules. Soit V l'ensemble des variables qui apparaissent dans les formules f1, f2, f3, …, fn.

Si ¶ est une valuation de V qui satisfait chacune des formules, alors on dit que ¶ satisfait E.

On dit que E est ssatisfaisables (ou cohérent ou consistant) s'il existe au moins une valuation de V qui satisfait E.

Méthode pour résoudre ce problème :

1) Méthode de la table de vérité.
   Pour déterminer si E est satisfaisable, on travaille avec V={x,y,z}.
   Soit E= {X=>(¬X∧¬Y); Z=>X, Y∨Z}

X	Y	Z	X=>(¬X∧¬Y)	Z=>X	Y∨Z
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F

   On constate alors que la valuation

X	Y	Z
F	V	F

   Satisfait E. Maintenant, puisqu'il existe une valuation qui satisfait E, E est donc satisfaisable.

2) La méthode du raccourcie
   E= {¬A∨(B∧C), ¬A∨¬C, A}

   Décider si E est satisfaisable.
   Supposons que ¶=valuation est une valuation qui satisfait E.

A	B	C
?	?	?

   Alors ¶ satisfait A, donc

A	B	C
V	?	?

   Puisque ¶ satisfait ¬A∨¬C, on voit que ¶ satisfait ¬C, donc

A	B	C
V	?	F

   Mais alors, ¶ ne peut pas satisfaire ¬A∨(B∧C).

   Conclusion : Aucune valuation ne satisfait E , donc, autrement dit, E n'est pas satisfaisable.

3) La méthode de l'arbre de vérité
   ** Apprendre les 9 règles de décomposition
   Si il nous reste seulement une branche ouverte à la fin, elle donne la valuation ¶ qui satisfait E. **Pour l'arbre, on peut le faire dans n'importe quelle ordre.

LES FORCES NORMALES DISJONCTIVES (FND) ET LES FORCES NORMALES CONJONCTIVES (FNC)

Notation : si f1, …, fn sont des formules, alors

$$\bigwedge_{i=1}^{n} fi = f1 \wedge f2 \wedge f3 \wedge \ldots \wedge fn$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} fi = f1 \vee f2 \vee f3 \vee \ldots \vee fn$$

La convention pour cette notation est la suivante :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} fi = V\ (vrai)$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} fi = F\ (faux)$$

Les définitions :

Un littéral : Un littéral est une formule qui est soit une variable propositionnelle, soit la négation d'une variable propositionnelle.

Une clause conjonctive est une formule :

$$Li \wedge \ldots \wedge Ln \text{ où } n \geq 0 \ et\ chaque\ Li\ est\ un\ littéral$$

Une clause disjonctive est une formule :

$$Li \vee \ldots \vee Ln \text{ où } n \geq 0 \ et\ chaque\ Li\ est\ un\ littéral$$

Les différentes formes :

Une forme normale disjonctive (FND) : Une somme de produit

<u>Théorème :</u> Quelque soit la formule f, il existe au moins une formule ¶ satisfaitsant :

1) ¶ est un FND
2) f=¶

On dit alors que ¶ est une FND de f.

Une forme normale conjonctive (FNC) : Un produit de somme

<u>Théorème :</u> Quelque soit f, il existe au moins une formule ¶ satisfaisant :

1) ¶ est en FNC
2) f=¶

On dit que ¶ est une FNC de f

LES ARGUMENTS LOGIQUES

Les arguments logique est un diagramme $\frac{\begin{matrix} f1 \\ f2 \\ \dots \\ fn \end{matrix}}{¶}$ où f1, …, fn sont des formules.

On dit alors que f1, …, fn sont les prémisses de l'argument et que ¶ est la conclusion.

Un argument est VALIDE si toute valuation qui satisfaient toutes les prémisses et satisfait aussi la conclusion.

Un argument est INVALIDE s'il existe au moins une valuation qui satisfait toutes les prémisses, mais pas la conclusion.

LA VALIDITÉ DES ARGUMENTS

Soit A un argument. Un contre-exemple de A est une valuation qui satisfait toutes les prémisses de A, mais pas la conclusion.

A est valide <=> il n'existe aucun contre-exemple

A est invalide <=> il existe au moins un contre-exemple

Par exemple : L'argument $\frac{\begin{matrix} X => (Y \vee Z) \\ \neg Y \end{matrix}}{\neg X}$ est-il valide?

X	Y	Z	$X => (Y \vee Z)$	$\neg Y$	$\neg X$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

La valuation

X	Y	Z
V	F	V

est un contre-exemple de cet argument. L'argument est donc invalide.

La méthode du raccourcie

Ici, nous recherchons un contre-exemple à l'argument suivant : $\frac{\substack{X => (Y \wedge Z) \\ \neg Y}}{\neg X}$

Supposons que ¶ est un contre exemple de l'argument.

X	Y	Z
?	?	?

Alors, ¶ ne satisfait pas la conclusion ¬X. Donc,

X	Y	Z
V	?	?

¶ satisfait la premisse ¬Y. Donc,

X	Y	Z
V	F	?

Alors, ¶ ne satisfait pas le 1er prémisse. Donc, finalement, ¶ n'est pas un contre-exemple. Ainsi, il n'existe aucun contre exemple. L'argument est donc valide.

La méthode de l'arbre

Ici, nous recherchons si l'argument (en transferant la conclusion en formules) est satisfaisable.

$$\begin{array}{c} S => T \\ T => \neg S \\ \underline{\neg\neg S} \end{array}$$

En faisant la méthode de l'arbre, s'il n'y a aucune branche d'ouverte, E est donc non satisfaisable. Si E est non satisfaisable, cela veut dire que l'argument est valide.

Par contre, si E avait été satisfaisable, cela veut dire que nous aurions trouvé un contre-exemple, et que l'argument était invalide.

LES PREUVES

1) Preuves de l'implication P=>Q

Méthode de preuve directe

Supposons que P est vrai…
Donc Q est vrai.

Preuve de la contreposée

P=>Q est équivalente à ⌐Q=>⌐P, donc si l'une de ces applications est vrai, l'autre aussi est vrai.

Assertion : P=>Q
Preuve : Supposons que ⌐Q est vrai,
Donc, ⌐P est vrai.

C'est une preuve directe de la contraposée.
⌐Q=>⌐P

2) Preuves du conjonctif biconditionnel : P<=>Q

Pour prouver P<=>Q, on doit prouver P=>Q et Q=>P.

Preuve par séparation des cas.

Sachant que P1∨P2 est vrai, on veut prouver Q.

Assertion : Q
Preuves : On sait que P1 ∨ P2 est vrai.

Supposons que P1 est vrai, alors… donc Q est vrai
Supposons que P2 est vrai, alors… donc Q est vrai

Ainsi Q est vrai.

LA MÉTHODE DE PREUVE PAR CONTRADICTION

Assertion : f
Preuve : Supposons que f est faut.
Conclusion : On obtient une conséquence absurde de l'hypothèse «f est faux ».

LA MÉTHODE DE PREUVE PAR CONTRADICTION POUR P=>Q

Supposons que P=>Q est faux. Donc, on suppose que P est VRAI et que Q est FAUX.
Si on obtient une contraction, nous avons réussi à prouver que c'est vrai.

LA MÉTHODE DE PREUVE PAR INDUCTION

P(n) : un énoncé (vrai ou faux) concernant un entier n.

Pour montrer que P(n) est vrai pour tout $n \geq 1$, il suffit de montrer que

1) Nous devons premièrement prouver que P(1) est vrai
2) Quelque soit $n \geq 1$, l'implication P(n)=>P(n+1) est aussi vrai.

LES ENSEMBLES (LA NOTATION DE BASE)
La notation $x \in A$ signifie que x est un élément de l'ensemble A (Elle se lit « x est un élément de A » ou encore « x appartient à A »).

La théorie des ensembles commence par la définition de l'égalité d'ensemble :
Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Ceci signifie que :

- Si deux ensembles ont les mêmes éléments, alors ces ensembles sont égaux
- Si deux ensembles sont égaux, alors ils ont les mêmes élémentsLor

Par exemple :

$$2 \in A, 3 \in A, 4 \in A, et\ 2{,}3{,}4\ sont\ les\ seuls\ \text{éléments}\ de\ A$$
$$2 \in B, 3 \in B, 4 \in B, et\ 2{,}3{,}4\ sont\ les\ seuls\ \text{éléments}\ de\ B$$

Alors la définition d'égalité implique que A=B. Donc, il ne peut pas exister plusieurs ensembles différents dont les éléments seraient 2,3,4 et rien d'autre.

Notation : Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sont des objets quelconques, $\{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ désigne l'ensemble dont les éléments sont précisement $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Par exemple : {2,5}={5,2}={2.5.2}

Puisque 2 et {2,5} sont des objets, on peut former l'ensemble {2, {2,5}}.
$2 \in A, \{2{,}5\} \in A, et\ ce\ sont\ les\ seuls\ \text{éléments}\ de\ A.$ Notez que 5 n'est pas élément A.

$\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\}$: $L'ensembledes\ nombres\ naturels$
$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1,0,1,2,3, \ldots\}$: $L'ensemble\ des\ nombres\ entiers$
$\mathbb{Q} = L'ensembledes\ nombres\ rationnels\ \left(\frac{a}{b}\ sont\ des\ entiers, b \neq 0\right)$
$\mathbb{R} = L'ensembledes\ nombres\ \text{réels}$

On peut définir un ensemble par :
$A = \{x \mid x\ satisfait\ la\ condition\ P\}$
En d'autres mots, A est l'ensemble de tous les éléments x qui satisfont la condition P.

Par exemple :
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x = 0\} = \{-1,0,1\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{Z}^2 < 3\} = \{-1,0,1\}$

Remarquons ici que A=B, car si $x \in \mathbb{R}\ et\ x^3 - x = 0\ alors\ (x-1)(x+1) = 0$

L'ensemble vide.
Lorsqu'un un ensemble n'a aucun élément, car aucun x ne satisfait la condition. Alors, on dit que l'ensemble E est vide (∅). Donc E=∅

Si deux ensembles sont vides, on dit qu'ils sont égaux, puisqu'ils ont les mm éléments (∅)

Le concept des sous-ensembles
Soient A et B des ensembles;
Si la conditions, tout élément de A est élement B (vrai), alors on dit que A est sous-ensembles de B. (A est une partie de B, A est inclus dans B)

$$A \subseteq B \ signifie\ que\ A\ est\ un\ sous\ ensemble\ de\ B.$$

Par exemple :
$\{2,3,5\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
$\{1,2,3,4,5\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

À retenir :
$A \subseteq A: vrai, car\ ils\ ont\ les\ \text{mê}mes\ ensembles.$
$\emptyset \subseteq A: vrai, car\ l'ensemble\ vide\ est\ inclu\ dans\ tous\ ensemble.$

Si B n'est pas sous-ensemble de A, cela signifie que :
1) Il est faut que tous les éléments de A sont éléments de B
2) Donc, au moins un des éléments de A n'est pas élément de B.

P(E)= L'ensemble de tous les sous-ensembles de E
E=$\{1,2,3\}$, les sous-ensembles de E sont : $\emptyset$, $\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$

Un ensemble de 3 éléments a précisement (2^(nbr d'éléments)), donc 8 sous-ensembles.