MAT 2784 B – EXAMEN FINAL

Prof. : Patrick Boily
15 avril 2013, 19h30-22h30
MRT 221

Les ordinateurs, iPhones et autres gadgets ne sont pas admissible. Vous pouvez toutefois utiliser des calculatrices scientifiques non programmables sans WiFi.

Répondez aux questions sur le questionnaire. Assurez-vous de placer votre nom et numéro d'identification dans l'espace réservé à cet effet sur cette page. Un formulaire se retrouve à la fin de l'examen, après la dernière question.

Les 8 questions sont d'égales valeurs. Il n'y a que 5 notes possibles:

- La solution est bonne et présentée avec une justification valide: **4/4**
- La solution est fausse même si la justification est valide (il n'y a que de petites erreurs de calcul): **3/4**
- La justification présentée n'est que partiellement valide: **2/4**
- La solution est bonne mais présentée sans justification ou avec une justification invalide: **1/4**
- Toute autre situation: **0/4**

Assurez-vous de calculez les angles en radians. Test : $\sin 1.123456789 = 0.901601123$.

NOM : ____

NUMÉRO D'ÉTUDIANT : _____________________________________

Q1	**Q2**	**Q3**	**Q4**	**Q5**	**Q6**	**Q7**	**Q8**	**Total**

Q1. Résoudre le problème à valeur initiale

$$(1 - xy)y' + y^2 + 3xy^3 = 0, \quad y(0) = 1.$$

Q2. Résoudre le problème à valeur initiale:

$$x^2y'' + 7xy' + 9y = 0, \qquad y(1) = 1, \qquad y'(1) = 1.$$

Q3. Trouver la solution générale de

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Q4. Résoudre le système d'équation différentiel

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Q5. Tracer $h(t)$ sur l'intervalle $[0,6]$, développer $h(t)$ à l'aide de fonctions d'Heaviside $u(t-a)$ et trouver la transformée de Laplace de $h(t)$:

$$h(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & 0 \leq t < 2 \\ 5 - t, & 2 \leq t < 5 \\ t - 5, & 5 \leq t \end{cases}$$

Note : $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)$.

Q6. Résoudre (par transformation de Laplace) l'équation

$$y'' + 5y' + 6y = u(t-1), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

Note : $\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}$.

Q7. Considérer l'équation différentielle

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

et la méthode numérique

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3k_2}{4}\right),$$

$$k_4 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{2k_1}{9} + \frac{k_2}{3} + \frac{4k_3}{9}\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2k_1}{9} + \frac{k_2}{3} + \frac{4k_3}{9},$$

avec estimation de l'erreur locale

$$E_{n+1} = -\frac{5k_1}{72} + \frac{k_2}{12} + \frac{k_3}{9} - \frac{k_4}{8}.$$

Compléter les 5 petites cases pour l'équation

$$y' = y^3 - y - 2x, \qquad y(1) = 1, \qquad h = 0.1$$

et les 8 grandes cases à 6 décimales près.

For $n = 0$:

$f(x, y) =$ ☐ $x_0 =$ ☐ $y_0 =$ ☐ $h =$ ☐

$k_1 =$ ☐ $k_2 =$ ☐

$k_3 =$ ☐ $k_4 =$ ☐

$y_1 =$ ☐ $E_1 =$ ☐

For $n = 1$:

$x_1 =$ ☐ $y_1 =$ ☐

$k_1 =$ ☐

Q8. Soit la formule de dérivation numérique

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi), \qquad \xi \in]x_0 - 2h, x_0 + 2h[$$

et le tableau $\{x_n, f(x_n)\}$

x	$f(x) = \sin(x) - \cos(x)$
1.0	0.30116868
1.1	0.43761124
1.2	0.56968133
1.3	0.69605936
1.4	0.81548259

a) Approcher la valeur numérique $\mathrm{dfn} \approx f'(1.2)$ en omettant l'erreur de méthode.

b) Calculer la valeur exacte $\mathrm{dfe} = f'(1.2)$ de la fonction $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$.

c) Calculer l'erreur $\varepsilon = \mathrm{dfn} - \mathrm{dfe}$.

d) Vérifier que la valeur de $|\varepsilon|$ est bornée par le module de l'erreur de méthode.

FORMULAIRE

L'équation différentielle homogène du 1ier ordre

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

admet un facteur d'intégration $\mu(x)$ ou $\mu(y)$ selon que

$$\frac{M_y - N_x}{N} = f(x) \Longrightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)\,\mathrm{dx}}$$
$$\frac{N_x - M_y}{M} = g(y) \Longrightarrow \mu(y) = e^{\int g(y)\,\mathrm{dy}}$$

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + c$$

$$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + c$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + c$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + c$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\tilde{s})\, d\tilde{s}$$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
1	$1/s$	1
2	$1/s^2$	t
3	$1/s^n$, $(n = 1, 2, \cdots)$	$t^{n-1}/(n-1)!$
4	$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$
5	$1/s^{3/2}$	$2\sqrt{t/\pi}$
6	$1/s^a$ $(a > 0)$	$t^{a-1}/\Gamma(a)$
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1}e^{at}$
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k}$ $(k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1}e^{at}$
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ $(a \neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt})$
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$ $(a \neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(ae^{at} - be^{bt})$
13	$\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}\sin \omega t$
14	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
15	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sinh at$
16	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}e^{at}\sin \omega t$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos \omega t$
19	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$
21	$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
22	$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\omega}\sin \omega t$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
24	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ $(a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt)$
25	$\dfrac{1}{s^4+4k^4}$	$\dfrac{1}{4k^3}(\sin kt \cosh kt - \cos kt \sinh kt)$
26	$\dfrac{s}{s^4+4k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2}\sin kt \sinh kt$
27	$\dfrac{1}{s^4-k^4}$	$\dfrac{1}{2k^3}(\sinh kt - \sin kt)$
28	$\dfrac{s}{s^4-k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2}(\cosh kt - \cos kt)$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-(a+b)t/2}I_0\left(\dfrac{a-b}{2}t\right)$
31	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$

32	$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at}(1+2at)$
33	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^k} \qquad (k>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\dfrac{t}{2a}\right)^{k-1/2} I_{k-1/2}(at)$
34	e^{-as}/s	$u(t-a)$
35	e^{-as}	$\delta(t-a)$
36	$\dfrac{1}{s} e^{-k/s}$	$J_0(2\sqrt{kt})$
37	$\dfrac{1}{\sqrt{s}} e^{-k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$
38	$\dfrac{1}{s^{3/2}} e^{k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}} \sinh 2\sqrt{kt}$
39	$e^{-k\sqrt{s}} \qquad (k>0)$	$\dfrac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-k^2/4t}$
40	$\dfrac{1}{s}\ln s$	$-\ln t-\gamma \quad (\gamma \approx 0.5772)$
41	$\ln\dfrac{s-a}{s-b}$	$\dfrac{1}{t}(e^{bt}-e^{at})$
42	$\ln\dfrac{s^2+\omega^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}(1-\cos\omega t)$
43	$\ln\dfrac{s^2-a^2}{s^2}$	$\dfrac{2}{t}(1-\cosh at)$
44	$\arctan\dfrac{\omega}{s}$	$\dfrac{1}{t}\sin\omega t$
45	$\dfrac{1}{s}\,\mathrm{arc\,cot}\, s$	$\mathrm{Si}(t)$

(FEUILLE BROUILLON)