# Université d'Ottawa

Département de Mathématiques et de Statistique

MAT 1702B: Méthodes mathématiques II

Professeur : Abdellah Sebbar

Examen Final – Avril 2013

Nom ______________________ Prénom ______________________

# d'étudiant ______________________

**Instructions :**

(1) L'examen est d'une durée de 3 heures.
(2) Le nombre de points pour chaque question est indiqué entre les parenthèses carrées.
(3) Vous devez tout justifier.
(4) Veuillez utiliser l'espace désigné pour écrire vos réponses. Vous pouvez utiliser le verso de chaque feuille comme papier brouillon. Par contre, ces brouillons ne seront pas considérés lors de la correction.
(5) Ecrivez votre numéro d'étudiant au haut de chaque feuille.
(6) Aucune note de cours, aucune calculatrice ni papier brouillon n'est permis.
(7) Bonne chance !

Ne pas écrire dans le tableau suivant.

| Question | 1–14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Maximum | 24 | 5 | 9 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 7 | 65 |
| Note | | | | | | | | | | |

## Partie A: Questions à réponses seulement

Pour les questions 1–16, seule votre réponse finale comptera pour des points. Ecrivez vos réponses dans les espaces correspondants prévus .

QUESTION 1. [**1 pt**] Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 7 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 8 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -15 & 23 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 21 & 4/5 & -13 & 6 & 5 \end{bmatrix},$$

Trouver $\det A$?

**Réponse:** $\det A =$________________________

**Solution:** $\det A = -15$.

QUESTION 2. [**2 pts**] Trouvez une équation paramétrique de la droite passant par les points $(-2, 1, 3)$ et $(5, 1, 7)$.

**Réponse:**________________________

**Solution:** Une équation paramétrique de la droite considérée est $(-2, 1, 3) + t(7, 0, 4)$, $t \in \mathbb{R}$. (D'autres réponses sont possibles.)

QUESTION 3. [**2 pts**] Donner une base du noyau de la matrcie:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Réponse:**________________________

**Solution:** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Question 4. [**2 pts**] Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Déterminer $AB^T$ et $A + 2B$?

**Réponse:** $AB^T =$________________________, $A + 2B =$________________________

**Solution:** $AB^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $A + 2B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

Question 5. [**1 pt**] Si $M$ est une matrice $10 \times 8$ de rang 3. Quelle est la dimension de $\ker M$?

**Réponse:** $\dim \ker M =$________________________

**Solution:** $\dim \ker M = 5$.

Question 6. [**2 pts**] Si le nombre complexe

$$\frac{3-i}{2+4i}$$

est écrit sous la forme $a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, quelles seront les valeurs de $a$ et $b$?

**Réponse:** $a =$______________, $b =$______________

**Solution:** $a = \frac{1}{10}$, $b = \frac{-7}{10}$

QUESTION 7. [**2 pts**] Si $z = 3 + i$ et $w = 5 - 2i$. Calculer $z - \bar{w}$ et $zw$.

**Réponse:** $z - \bar{w} =$____________________, $zw =$____________________

**Solution:** $z - \bar{w} = -2 - i$, et $zw = 17 - i$.

QUESTION 8. [**2 pts**] Quelles sont les valeurs propres de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ?$$

**Réponse:**_________________________

**Solution:** $\pm i$.

QUESTION 9. [**2 pts**] Supposons que $A$, $B$ et $C$ sont des matrices inversibles. Résoudre l'équation suivante dont l'inconnue est la matrice $X$. C'est à dire exprimer $X$ en fonction de $A$, $B$, $C$, leurs inverses ou leur transposées.

$$CB^T(X + A)C^{-1} = A$$

**Réponse:**_________________________

**Solution:** $X = (B^T)^{-1}C^{-1}AC - A$.

QUESTION 10. [**2 pts**] Parmi les énoncés suivants, lesquels sont vrais pour **toute** matrice inversible A $n \times n$? Il peut y avoir plus qu'une bonne réponse. Vous devez indiquer **toutes** les réponses correctes. Pour chaque réponse incorrecte, vous perdrez des points.

(a) La matrice$A$ est équivalente à la matrice unité.
(b) Le système $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non-triviale.
(c) Les colonnes de $A$ sont linéairement dépendantes.
(d) Le rang de $A$ est $n$.
(e) Le déterminant de $A$ est non nul.
(f) La dimension de $\ker A$ is non nulle.

**Réponse:**________________________

**Solution:** (1), (4), (5)

QUESTION 11. [**2 pts**] Parmi les énoncés suivants, lesquels sont vrais? Il peut y avoir plus qu'une bonne réponse. Vous devez indiquer **toutes** les réponses correctes. Pour chaque réponse incorrecte, vous perdrez des points.

(a) Une matrice donnée peut avoir plus qu'une forme échelonnée.
(b) Une matrice donnée peut avoir plus qu'une forme échelonnée réduite.
(c) Toute matrice non nulle admet un inverse.
(d) Tout sous espace vectoriel admet exactement une seule base.
(e) Si une matrice $B$ est obtenue d'une matrice $A$ en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne alors $\det A = \det B$.

**Réponse:**________________________

**Solution:** (1), (5)

QUESTION 12. **[2 pts]** Lesquels, parmi les ensembles suivants, sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ pour la valeur de $n$ donnée. Il peut y avoir plus qu'une bonne réponse. Vous devez indiquer **toutes** les réponses correctes. Pour chaque réponse incorrecte, vous perdrez des points.

(a) L'ensembles des solutions d'un système linéaire homogène.
(b) L'ensemble des vecteurs propres d'une matrice $n \times n$.
(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = x_3 \text{ et } x_2 = x_3 + 1\}$, $n = 3$.
(d) $\{(y^3, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, $n = 2$.
(e) L'ensembles des combinaisons linéaires de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$, $n = 4$.

**Réponse:**________________________

**Solution:** (1), (5)

QUESTION 13. **[1 pt]** Si $A$ et $B$ sont des matrices $2\times 2$ telles que $\det A = 3$ et $\det B = -1$. Quel est $\det(2A^T BA^{-1})$?

**Réponse:** $\det(2A^T BA^{-1}) =$______________, $\det A^{-1} =$______________

**Solution:** $\det(2A^T BA^{-1}) = -4$.

QUESTION 14. **[1 pt]** Pour quelles valeurs de $t$ (s'il y en a), les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ t \end{bmatrix}$$

sont-ils linéairement dépendants?

**Réponse:**________________________

**Solution:** $t = -6$

Question 15. [**5 points**] Calculer le déterminant de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Solution:** On développe le long de la 4eme ligne pour obtenir

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{vmatrix}.$$

Après, on développe le long de la 3eme ligne pour obtenir

$$\det A = -10 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Puis On développe le long de la 1ere ligne pour obtenir

$$\begin{aligned} \det A &= -10 \left( 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -10(1 \cdot 4 - (-2)1) + (3 \cdot 4 - (-2)(-2)) + 3(3 \cdot 1 - (-2)1)) \\ &= -10(6 + 8 + 15) = -290. \end{aligned}$$

Question 16. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) [**3 points**] Trouver les valeurs propres de $A$.

**Solution:** En développant le long de la 3eme ligne, on a:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)^2.$$

On en déduit que les valeurs propres sont 2 et 3.

(b) [**4 points**] Pour chacune des valeurs propres dans (a), trouver une base pour le sous-espace propre correspondant.

**Solution:** La forme échelonnée réduite de $A-2I$ est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, et celle de $A-3I$ est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Donc $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ est dans Ker $(A-2I)$ si $\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ avec $x_3$ libre. On en déduit que $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ est une base de l'éspace propre Ker $(A-2I)$.

De même, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ est dans Ker $(A-3I)$ si $\vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ avec $x_2$ et $x_3$ libres. On en déduit que $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de l'éspace propre Ker $(A-3I)$.

(c) [**2 points**] Trouvez une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que

$$P^{-1}AP = D.$$

(Il n'est pas nécessaire de calculer $P^{-1}$.)

**Solution:** Comme on a une base de vecteurs propres, la matrice $A$ est digonalisabe. Si $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, alors on a : $P^{-1}AP = D$.

Question 17. [**4 points**] Est-ce que la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ est inversible? Si oui trouver son inverse $A^{-1}$

**Solution:**

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[2L_1+L_3]{4L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{2L_2+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+L_1]{L_3+L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 11 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{-2L_3+L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -17 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

On en déduit que $A$ est inversible et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -17 & -4 & -1 \\ 14 & 3 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 18. [**4 points**]
Est ce que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

sont linéairement dépendants? Si oui trouver une relation de dépendance.

**Solution:** On réduit la matrice dont les colonnes sont $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme la 4eme colonne n'a pas de pivot, $x_4$ est une varibale libre. On en déduit que les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ sont linéairement dépendants. Si $x_4 = 1$, alors on obtient $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ et $x_3 = -3$. Ce qui fournit les coefficients d'une relation de dépendance:
$\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3 + \vec{v}_4 = 0$

Question 19. [**4 points**]
Trouver une base et la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-2\\0\\0\\2\end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}3\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \ \vec{v}_4 = \begin{bmatrix}5\\-3\\3\\-4\end{bmatrix}, \ \vec{v}_5 = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

**Solution:** $[A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \overset{-L_1+L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & -9 & -2 \end{bmatrix}$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_3+L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes 1, 2 et 3 sont des colonnes pivot, et donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base pour le sous-espace engendré par les 5 vecteurs. La dimension est donc 3.

Question 20. [4] **points**] Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$ et écrire la solution sous forme paramétrique vectorielle.

**Solution:** On a:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1+L_3]{-2L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_2+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-1/3L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-2L_2+L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

C'est la forme echelonnée réduite. Le système associé est

$$\left[\begin{array}{cccl} x_1 & & -x_3 & = 1/3 \\ & x_2 & -x_3 & = 1/3 \\ & & x_3 & \text{libre} \end{array}\right.$$

On en déduit que $x_1 = x_3 + 1/3$ et $x_2 = x_3 + 1/3$. D'où, la solution sous forme paramétrique est:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $s(= x_3)$ est un paramètre.

QUESTION 21. [**5 points**] Une économie fermée est formée de deux secteurs qui sont les télécommunications et les services. Pour produire une unité, le secteur des télécommunications utilise 0.20 unité provenant du secteur des télécommunications et 0.50 unité provenant du secteur des services. Cependant, pour produire une unité, le secteur des services utilise 0.20 unité du secteur des télécommunications et 0.25 du secteur des services.

(a) Donnez la matrice $C$ des coefficients techniques de cette économie.

**Solution:**

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

(b) Donnez l'équation de production de cette économie (le modèle input-output de Leontief).

**Solution:** C'est: $\vec{x} = C\vec{x} + \vec{d}$ ou bien $(I_2 - C)\vec{x} = \vec{d}$.

(c) Déterminez les niveaux de production que nécessite une demande finale de $\vec{d} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix}$

**Solution:** On doit résoudre le système $(I_2 - C)\vec{x} = \vec{d}$ avec

$$I_2 - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.5 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

On a $\det(I_2 - C) = 0.6 - 0.1 = 0.5$ et

$$(I_2 - C)^{-1} = \frac{1}{0.5}\begin{bmatrix} 0.75 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.4 \\ 1 & 1.6 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le niveau de production est

$$\vec{x} = (I_2 - C)^{-1}\vec{d} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.4 \\ 1 & 1.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 \\ 72 \end{bmatrix}.$$

Question 22. Dans un pays, une compagnie $A$ a le monopole sur le service de téléphone à longue distance. Une compagnie $B$ vient juste de rentrer dans le marché (donc aucun client initialement). Chaque année, 40% des clients de $A$ se tournent vers $B$ et 90% des clients de $B$ se tournent vers $A$.

(a) [**1 point**] Écrire la matrice de migration $M$ et le vecteur d'état initial $\mathbf{x}_0$ pour ce problème.

**Solution:**

$$M = \begin{bmatrix} .6 & .9 \\ .4 & .1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) [**2 point**] Trouvez la distribution du nombre de clients de $A$ et $B$ après deux ans comme des fractions/pourcentages du nombre total des clients.

**Solution:**

$$x_2 = M^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} .6 & .9 \\ .4 & .1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .6 & .9 \\ .4 & .1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .6 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .72 \\ .28 \end{bmatrix}$$

Ainsi, après deux ans, la compagnie $A$ aura 72% des clients et la compagnie $B$ aura 28% des clients.

(c) [**4 point**] Trouvez le vecteur d'équilibre, et trouvez la part de marché de la compagine $A$ à l'équilibre.

**Solution:** Puisque la matrice $M$ est régulière stochastique, on a besoin de trouver une vecteur propre pour la valeur propre 1. On fait la réduction

$$\left[\ M - I \mid 0\ \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -.4 & .9 & 0 \\ .4 & -.9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -.4 & .9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La solution générale est donc

$$\mathbf{x} = x_2 \begin{bmatrix} 9/4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On choisit la variable libre de telle sorte que $\mathbf{x}$ est un vecteur unitaire.

$$(9/4 + 1)x_2 = 1 \Rightarrow x = 4/13.$$

Ainsi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9/13 \\ 4/13 \end{bmatrix}$$

et la compagnie $A$ a 9/13 des clients au long terme.

Cette page est dédiée à vos brouillons.

Cette page est dédiée à vos brouillons.