



uOttawa

L'Université canadienne
Canada's university

Arian NOVRUZI
Department of Mathematics and Statistics
University of Ottawa
email:novruzi@uottawa.ca

MAT2722A, 2012
Examen final

Écrivez CLAIEMENT (en lettres capitales) votre

NOM DE FAMILLE, PRENOM:
NUMERO d'étudiant:

+ Sol

Instructions:

- La durée de l'examen est de 3 heures.
- Vérifiez que cette examen comporte 9 questions, pour un total de 60 points. Vous devez répondre à toutes les questions.
- Vous devez écrire la solution dans l'espace suivant la question. Au cas de besoin, vous pouvez utiliser l'arrière de la page (indiquez précisément où la solution continue). Il y a une page brouillon suivant la dernière question.
- **L'utilisation de tout manuel ou des notes de cours est interdite.**
- **Vous pouvez utiliser une calculatrice de base - c.à.d., une calculatrice sans fonctionnalités graphiques ou de programmation.**

Réponses

Problème	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total (60)
Votre résultat										

Q1 • Find min/max of $f(x,y) = x^2 + y^2$, under the constraint $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$.

Question 1 (6 points)

Trouvez le maximum et le minimum global de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$, sous la contrainte $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$.

Sol

Set $D = \{(x,y), (x-1)^2 + y^2 < 4\}$, $\partial D = \{(x,y), (x-1)^2 + y^2 = 4\}$

and $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 4$.

1. Find c.p. of f in D :

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned} \Rightarrow (x,y) = (0,0).$$

2. Find c.p. of f on ∂D :

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2(x-1), & (1) \\ 2y = \lambda \cdot 2y, & (2) \\ (x-1)^2 + y^2 = 4. & (3) \end{cases}$$

From (2): $2y(\lambda - 1) = 0$; so $y = 0$ or $\lambda = 1$.

For $y = 0$; from (3): $(x-1)^2 = 4$, $x = 1 \pm 2$; so

$$(x,y) = (-1,0), (x,y) = (3,0)$$

For $\lambda = 1$ we don't find any solution because (1) becomes impossible.

3. Evaluate f at c.p.

c.p.	(0,0)	(-1,0)	(3,0)
f	0	1	9

 \Rightarrow

max. global = 9 at (3,0)

min global = 0 at (0,0)

Q2: (a) Sketch the domain of integration of $\int_0^1 \int_x^1 f(x,y) dy dx$

(b) Evaluate $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$.

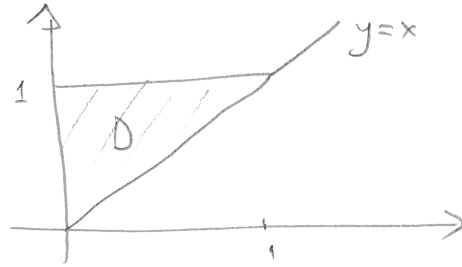
Question 2 (5 points)

(a) Tracez le domaine d'intégration pour l'intégrale $\int_0^1 \int_x^1 f(x,y) dy dx$.

(b) Évaluez $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$.

sol

(a)



$$(b) \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$$

$$= \iint_D e^{y^2} dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx dy$$

$$= \int_0^1 y e^{y^2} dy$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{y^2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} (e-1).$$

$$D = \{(x,y), 0 < y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

Q3: Find the volume of the region between the paraboloids:
 $z = x^2 + y^2$ and $z = 2 - x^2 - y^2$ that sits over the first quadrant.

Question 3 (6 points)

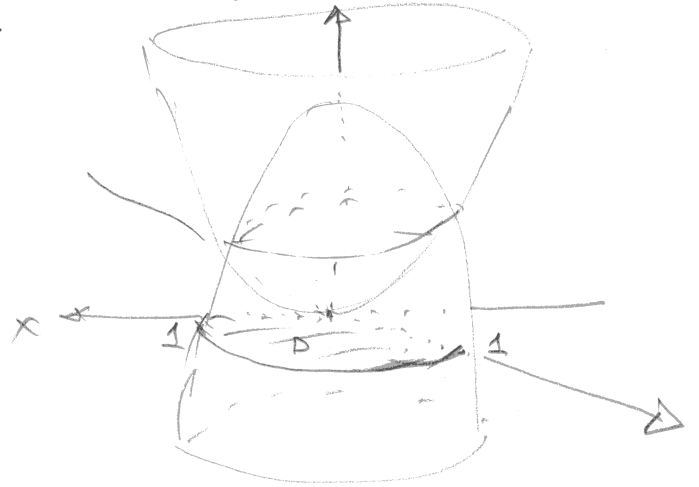
Trouvez le volume de la région entre les deux paraboloïdes $z = x^2 + y^2$ and $z = 2 - x^2 - y^2$, et qui se trouve sur le premier quadrant ($x, y \geq 0$).

Sol

Intersection:

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$E = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2) \right\}.$$

$$\text{Vol}(E) = \iiint_E 1 \cdot dV$$

$$= \iint_D \int_{x^2 + y^2}^{2 - (x^2 + y^2)} dz \, dA$$

$$= \iint_D 2 \cdot (1 - (x^2 + y^2)) \, dA$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \cdot 2(1 - r^2) \, dr \, d\theta.$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \left[\frac{1}{2} r - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

Q4: Use Green's theo to evaluate the integral I , where γ consists of the segment from $(-1,0)$ to $(1,0)$ and the top half of the circle $x^2 + y^2 = 1$ oriented counterclockwise.

Question 4 (6 points)

Utilisez le théorème de Green pour évaluer

$$I = \oint_{\gamma} (e^{\cos x} + \sin y) dx + (x \cos y + xy) dy,$$

où γ consiste du segment de $(-1,0)$ à $(1,0)$ et du demi-cercle supérieur $x^2 + y^2 = 1$ orienté positivement.

sol

$$I = \int_{\gamma} P \cdot dx + Q \cdot dy$$

$$= \iint_D (Q_x - P_y) dA.$$

$$= \iint_D (\cos y + y - \cos y) dA$$

$$= \iint_D y dA$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^1 r \cdot r \sin \theta \cdot d\theta dr$$

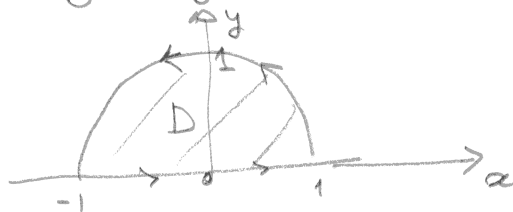
$$= \int_0^{\pi} \sin \theta \cdot \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{3} [-\cos \theta]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$P = e^{\cos x} + \sin y$$

$$Q = x \cos y + x \cdot y$$



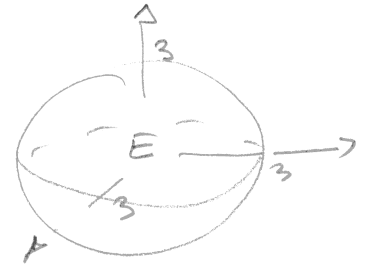
Q5: Find the flux of $\vec{F} = (x, y, z)$ through the sphere of radius 3 centered at the origin and oriented outwards in two ways:
 a) directly, b) using the Gauss (div) theorem.

Question 5 (6 points)

Trouvez le flux de $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ à travers la sphère de rayon 3 centrée à l'origine et orientée vers l'extérieur, en deux façons: (a) directement et (b) en utilisant le théorème de divergence (Gauss-Ostrogradski).

Sol

$$\begin{aligned} \text{a). } \phi &= \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, dS & \left| \quad \vec{n} &= \frac{(x, y, z)}{3} \right. \\ &= \iint_S (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{3} \, dS \\ &= \iint_S \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \, dS = \iint_S \frac{3^2}{3} \, dS = 3 \iint_S 1 \cdot dS \\ &= 3 \cdot 4\pi \cdot 3^2 = 108\pi. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b). } \phi &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \\ &= \iiint_E (1 + 1 + 1) \, dV = 3 \iiint_E 1 \, dV \\ &= 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 108\pi. \end{aligned}$$

mk
 a) can be solved also by using the standard method with spherical coordinates:

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(\varphi, \theta)) \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(\varphi, \theta)) \cdot (\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{3 \sin\varphi}_{\text{Jacobian}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cos\theta \sin\varphi \\ 3 \sin\theta \sin\varphi \\ 3 \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cos\theta \sin\varphi \\ 3 \sin\theta \sin\varphi \\ 3 \cos\varphi \end{pmatrix} \, d\varphi \, d\theta = 108\pi. \end{aligned}$$

Q.6: a) use curl test to show that \vec{F} is conservative

b) find the potential of \vec{F}

c) calculate $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Question 6 (8 points)

On considère le champ de vecteurs $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + xz^2, x^2y + yz^2, y^2z + x^2z)$.

(a) Utilisez le test du rotationnel pour prouver que \vec{F} est conservatif.

(b) Trouvez un potentiel de \vec{F} , i.e. trouvez un f tel que $\vec{F} = \nabla f$.

(c) Soit γ l'arc du cercle d'équations paramétriques $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Calculez $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Sol

$$a) \text{curl } \vec{F} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy^2 + xz^2 & x^2y + yz^2 & y^2z + x^2z \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

$$\text{curl } \vec{F} = \vec{0} \text{ implique } \vec{F} = \nabla f.$$

$$b) f = ? \begin{cases} f_x = xy^2 + xz^2 & (1) \\ f_y = x^2y + yz^2 & (2) \\ f_z = y^2z + x^2z & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{2} x^2 z^2 + g(y, z)$$

$$(2) \Rightarrow \cancel{x^2 y} + g_y = \cancel{x^2 y} + yz^2, \quad g_y = yz^2 \text{ so}$$

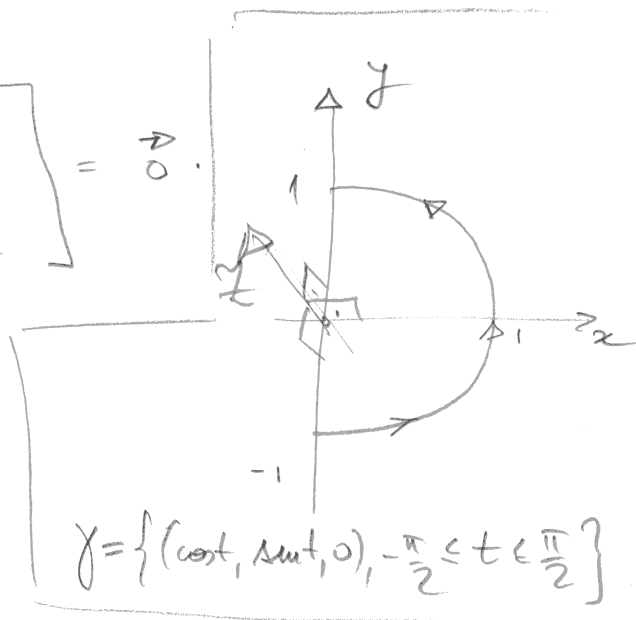
$$g(y, z) = \frac{1}{2} y^2 z^2 + h(z) \Rightarrow$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} (x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) + h(z).$$

$$(3) \Rightarrow x^2 z + y^2 z + h' = x^2 z + y^2 z \Rightarrow h' = 0, \quad h = C \Rightarrow$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} (x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2) + C$$

$$c) \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(0, 1, 0) - f(0, -1, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$



Q.7 Let \vec{F} as below and $\gamma = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = 2^2\}$ oriented counterclockwise.

Compute $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ in two ways:

a) directly and b) by using Stokes' theorem.

Question 7 (7 points)

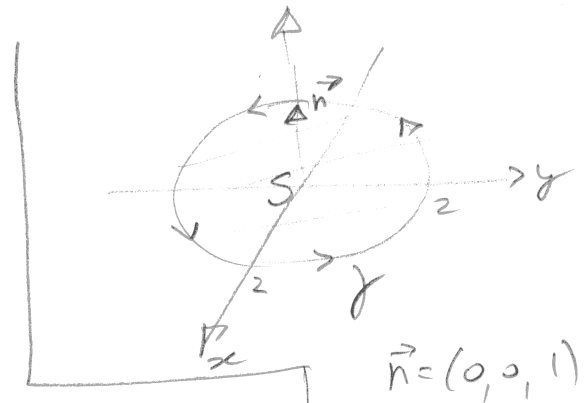
On considère $\vec{F}(x, y, z) = (2\pi yz^4 - 3y, 2\pi xz^4 + 3x, 8\pi xyz^3 + z^2 - z \ln(z^2 + 2))$ et soit γ le cercle sur le plan xy , de rayon 2 et de centre à l'origine orienté positivement quand on le voit de haut ($z > 0$). Calculez $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en deux façons: (a) directement et (b) en utilisant le théorème de Stokes.

Sol

a) $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$

$$= \int_0^{2\pi} (0 - 3 \cdot 2 \sin \theta, 0 + 3 \cdot 2 \cos \theta, 0) \cdot (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) \cdot d\theta.$$

$$= \int_0^{2\pi} (12 \sin^2 \theta + 12 \cos^2 \theta) d\theta = 12 \cdot 2\pi = 24\pi.$$



$$\vec{n} = (0, 0, 1)$$

b) $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot d\vec{S}$

$$= \iint_S 6 \cdot \vec{k} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_S 6 \cdot dS$$

$$= 6 \cdot \text{area}(S)$$

$$= 6 \cdot \pi \cdot 2^2$$

$$= 24\pi.$$

$$\text{curl } \vec{F} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{bmatrix}$$

$$= (8\pi x z^3 - 8\pi x z^3,$$

$$8\pi y z^3 - 8\pi y z^3,$$

$$2\pi z^4 + 3 - 2\pi z^4 + 3)$$

$$= (0, 0, 6)$$

Q.8: Find the flux of $\vec{F} = (2xz, -yz, z - 3y^2)$ through the surface S , which is part of the cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 2$, oriented downward

Question 8 (8 points)

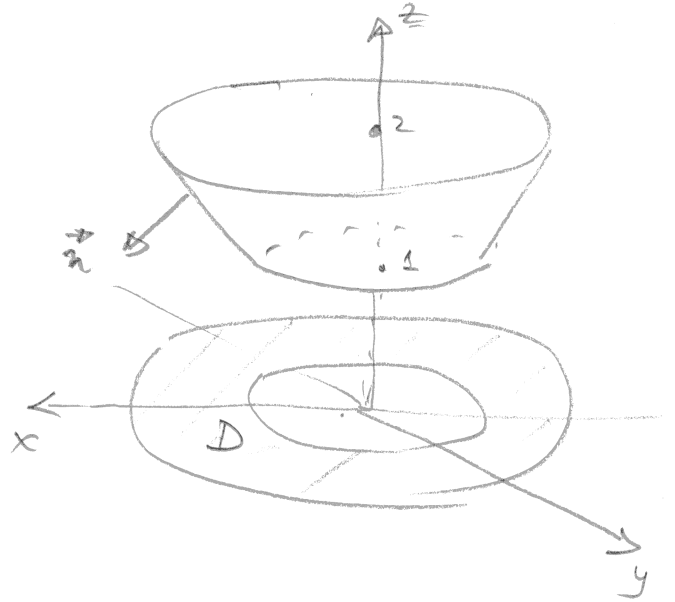
Trouvez le flux de $\vec{F}(x, y, z) = (2xz, -yz, z - 3y^2)$ à travers la surface S , qui est la partie du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour $z \in [1, 2]$, orientée vers le bas ($z < 0$) (c.à.d. orientée vers l'extérieur du cône que S englobe).

Sol

$$S = \{ (x, y, g(x, y)), (x, y) \in D \}$$

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D = \{ (x, y), 1^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2 \}$$



$$\phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_D (-2xz \cdot g_x - (-yz) \cdot g_y + z - 3y^2) dA$$

$$= \iint_D \left(-2x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} - 3y^2 \right) dA$$

$$= \iint_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2(x^2 + y^2) \right) dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r \cdot (r - 2r^2) dr d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{3} r^3 - 2 \frac{1}{4} r^4 \right]_1^2$$

$$= \frac{31}{3} \pi$$

Q.9 Use Gauss (div) theorem to compute $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, where S is the boundary of the tetrahedron bounded by the coordinate planes and the plane $x+y+z=1$, oriented outward.

Question 9 (8 points)

Utilisez le théorème de divergence (Gauss-Ostrogradski) pour calculer le flux de

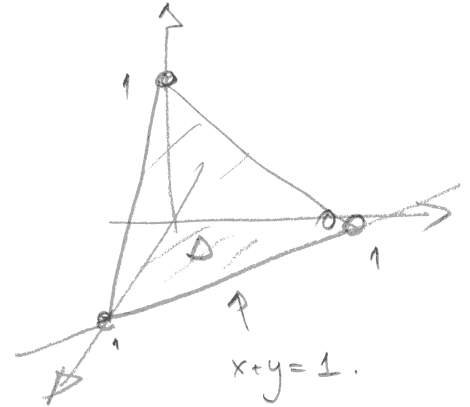
$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, x^3y^3)$$

à travers la surface S , qui est le bord du tétraèdre délimitée par les plans des coordonnées et le plan $x+y+z=1$. La surface S est orientée vers l'extérieur du tétraèdre qu'elle englobe).

Sol

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV$$

$$= \iiint_E (2x + y + 0) dV = \iiint_E 3x dV.$$



$$\begin{cases} E = \{ (x, y, z), (x, y) \in D, \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \} \\ D = \{ (x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \}. \end{cases}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 3x dz dy dx.$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 3x(1-x-y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[3x \cdot y - 3x^2 \cdot y - 3x \cdot \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \dots = \frac{1}{2}.$$