Université d'Ottawa

MAT 1732B Examen partiel, Correction

Durée : 80 Minutes. Enseignant : Martin Anderegg

Question 1. [4 points] Quelle est la valeur moyenne de la fonction $f(x) = ax\ln(ax)$ sur l'intervalle $[1/a,\, e/a]$?
Version A $a = 4$, **Version B** $a = 3$ et **Version C** $a = 2$.

Solution : On commence par calculer par parties une primitive de f (**2 points**).

$$\int ax\ln(ax)\mathrm{d}x \overset{f'(x)=ax,\ g(x)=\ln(ax)}{=} \frac{ax^2}{2}\ln(ax) - \int \frac{1}{x}\frac{ax^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{a}{2}x^2\ln(ax) - \frac{a}{4}x^2.$$

Ainsi (**1 points**),

$$\int_{1/a}^{e/a} ax\ln(ax)\mathrm{d}x = \big(\frac{a}{2}x^2\ln(ax) - \frac{a}{4}x^2\big)\Big|_{1/a}^{e/a} = \frac{e^2}{2a}\ln(e) - \frac{e^2}{4a} - \frac{1}{2a}\ln(1) + \frac{1}{4a} = \frac{1}{4a}(e^2+1).$$

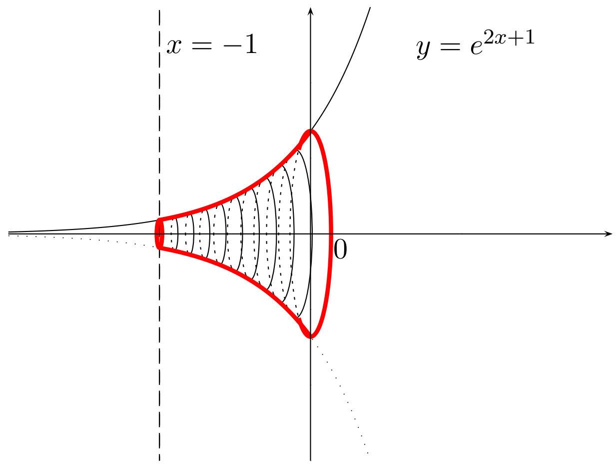
Finalement, la valeur moyenne est donné (**1 points**)

$$M_f = \frac{a}{e-1}\frac{1}{4a}(e^2+1) = \frac{e^2+1}{4(e-1)}.$$

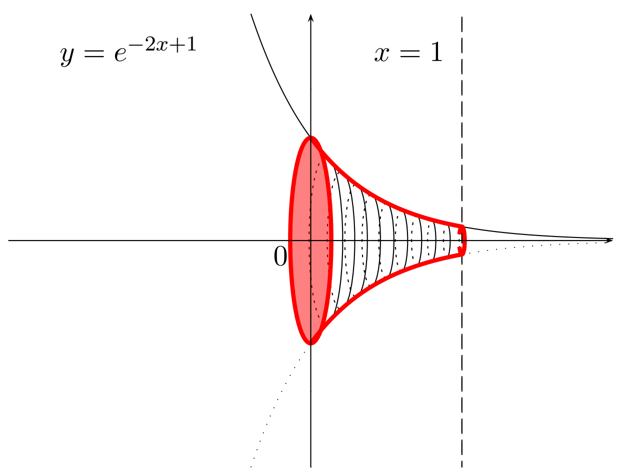
Donc pour les 3 versions de l'examen, on obtient le même résultat.

Question 2. [4 points]
Version A Soit R la région du plan délimitée par la courbe $y = e^{2x+1}$, l'axe des x, la droite verticale $x = -1$ et l'axe des y. On note S le solide obtenu par rotation de la région R autour de l'axe des x.
(a) Faire un croquis de S.
(b) Calculer le volume de S.
Version B Soit R la région du plan délimitée par la courbe $y = e^{-2x+1}$, l'axe des x, la droite verticale $x = 1$ et l'axe des y. On note S le solide obtenu par rotation de la région R autour de l'axe des x.
(a) Faire un croquis de S.
(b) Calculer le volume de S.
Version C Soit R la région du plan délimitée par la courbe $y = e^{x+1}$, l'axe des x, la droite verticale $x = -2$ et la droite $x = -1$. On note S le solide obtenu par rotation de la région R autour de l'axe des x.
(a) Faire un croquis de S.
(b) Calculer le volume de S.

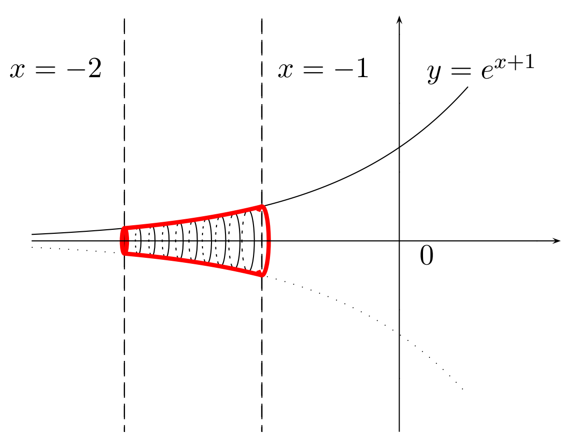
Solution : (a) (**1 points**)
Version A



Version B



Version C



(b) La formule du volume est $V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ (**1 points**). On trouve donc (**2 points**) :
Version A

$$V = \pi \int_{-1}^{0} (e^{2x+1})^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{0} e^{4x+2} \mathrm{d}x = \pi \Big(\frac{e^{4x+2}}{4}\Big) \Big|_{-1}^{0} = \frac{e^2 - e^{-2}}{4}.$$

Version B

$$V = \pi \int_{0}^{1} (e^{-2x+1})^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{0}^{1} e^{-4x+2} \mathrm{d}x = \pi \Big(\frac{e^{-4x+2}}{-4}\Big) \Big|_{0}^{1} = \frac{e^2 - e^{-2}}{4}.$$

Version C

$$V = \pi \int_{-2}^{-1} (e^{x+1})^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-2}^{-1} e^{2x+2} \mathrm{d}x = \pi \Big(\frac{e^{2x+2}}{2}\Big) \Big|_{-2}^{-1} = \frac{1 - e^{-2}}{2}.$$

Question 3. [5 points] Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y'(x) = (y^2 + a^2)(4x + b), \quad y(0) = a.$$

(**Version A** $a = 4,\ b = 1$; **Version B** $a = 3,\ b = 2$; **Version C** $a = 2,\ b = 3$).

Solution : Par séparation des variables, on est amené à calculer $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+a^2} = \int (4x + b)\mathrm{d}x$ (**1 points**). La première intégrale donne (**1 points**)

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$$

et la seconde (**1 points**)

$$\int (4x + b)\mathrm{d}x = 2x^2 + bx + C.$$

Ainsi, la solution générale est donnée par (**1 points**)

$$y(x) = a \tan(2ax^2 + abx + C).$$

En substituant la valeur $y(0) = a$, on trouve $\tan(C) = 1$, c'est-à-dire $C = \pi/4$. Au final on obtient donc (**1 points**)

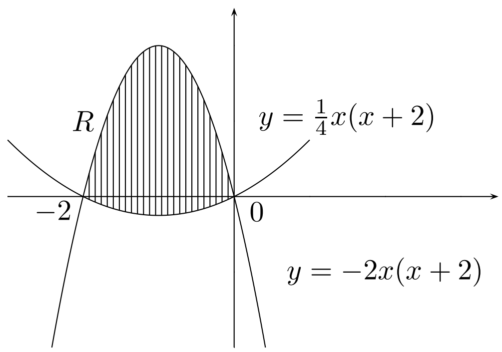
Version A	$y(x) = 4 \tan(8x^2 + 4x + \pi/4)$,
Version B	$y(x) = 3 \tan(6x^2 + 6x + \pi/4)$,
Version C	$y(x) = 2 \tan(4x^2 + 6x + \pi/4)$.

Question 4. [4 points]

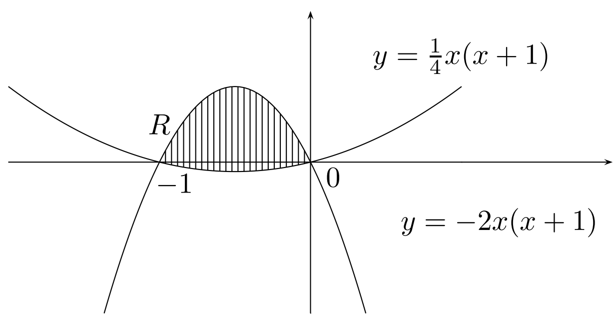
Version A Soit R la région du plan délimitée par les courbes $y = \frac{1}{4}x(x+2)$ et $y = -2x(x+2)$.
(a) Faire un croquis de la région R.
(b) Calculer l'aire de R.
Version B Même questions avec $y = -2x(x+1)$ et $y = \frac{1}{4}x(x+1)$.

Version C Mêmes questions $y = -2x(x+3)$ et $y = \frac{1}{2}x(x+3)$.

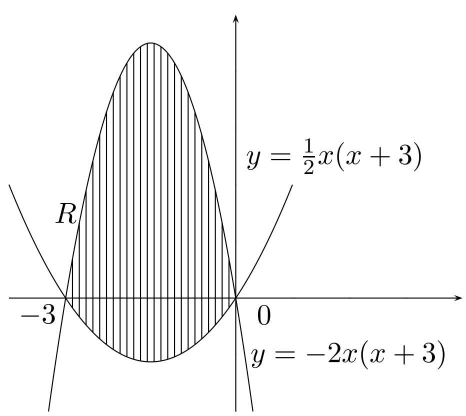
Solution : (a) (**1 points**)
Version A



Version B



Version C



(b) (**3 points**) **Version A**

$$\int_{-2}^{0}(-2x(x+2)-\frac{1}{4}x(x+2))\mathrm{d}x=-\frac{9}{4}\left(x^3/3+x^2\right)\Big|_{-2}^{0}=3.$$

Version B

$$\int_{-1}^{0}(-2x(x+1)-\frac{1}{4}x(x+1))\mathrm{d}x=-\frac{9}{4}\left(x^3/3+x^2/2\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{8}.$$

Version C

$$\int_{-3}^{0}(-2x(x+3)-\frac{1}{2}x(x+3))\mathrm{d}x=-\frac{5}{2}\left(x^3/3+3x^2/2\right)\Big|_{-3}^{0}=\frac{45}{4}.$$

Question 5. [6 points]
Version A Considérer l'intégrale définie suivante

$$\int_0^3 \frac{2x+6}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x.$$

(a) Expliquer précisément pourquoi il s'agit d'une intégrale impropre.
(b) Calculer l'intégrale indéfinie suivante

$$\int \frac{2x+6}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x.$$

(c) L'intégrale définie est-elle convergente ou divergente ? Si elle converge, calculer sa valeur.
Version B Mêmes questions avec

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x+5}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x.$$

Version C Mêmes questions avec

$$\int_0^3 \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x.$$

Solution : (a) (**1 points**) Comme $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$, la fonction à intégrer n'est pas définie en -1 (**Version B**) et en 3 (**Version A et C**).
(b) (**3 points**) **Version A** On écrit $\frac{2x+6}{x^2-2x-3}=\frac{3}{x-3}-\frac{1}{x+1}$. Ainsi,

$$\int \frac{2x+6}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x = 3\ln|x-3|-\ln|x+1|.$$

Version B On écrit $\frac{x+5}{x^2-2x-3}=\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+1}$. Ainsi,

$$\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x = 2\ln|x-3|-\ln|x+1|.$$

Version C On écrit $\frac{3x-1}{x^2-2x-3}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+1}$. Ainsi,

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x = 2\ln|x-3|+\ln|x+1|.$$

(c) (**2 points**) Dans chacun des cas, la limite est infinie et donc l'intégrale diverge.

Question 6. [4 points] La vitesse d'un escargot en fonction du temps est donnée par la fonction suivante

$$v(t) = ate^{-bt} \text{ mètre/jour.}$$

En supposant que l'escargot continue à ramper indéfiniment, quelle distance parcourra-t-il (à partir de maintenant, c'est-à-dire à partir de $t=0$) ? (**Version A** $a=5,\ b=0.08$; **Version B** $a=2,\ b=0.06$; **Version C** $a=4,\ b=0.07$)

Solution : On note $x(t)$ la distance parcourue par l'escargot au temps t. Alors

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(x)\mathrm{d}x = \int_0^t v(x)\mathrm{d}x$$

Il s'agit donc de calculer une primitive de $v(t)$:

$$\begin{aligned}\int ate^{-bt}\mathrm{d}t \quad &\overset{g(t)=t, f'(t)=e^{-bt}}{=} \quad a\big(-\frac{te^{-bt}}{b} + \int \frac{e^{-bt}}{b}\big) = a\big(-\frac{te^{-bt}}{b} - \frac{e^{-bt}}{b^2}\big)\\ &= \quad -\frac{a}{b^2}(bte^{-bt} + e^{-bt}).\end{aligned}$$

Ainsi, $v(t) = \int_0^t v(x)\mathrm{d}x = -\frac{a}{b^2}(bte^{-bt} + e^{-bt}) + \frac{a}{b^2}$. La distance parcourue par l'escargot est donc

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{a}{b^2} - \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{a}{b^2}(bte^{-bt} + e^{-bt})}_{=0} = \frac{a}{b^2},$$

où on peut utiliser la règle de l'Hospital pour justifier que la limite vaut 0.
Version A $\frac{5}{0.08^2} = 781.25$ mètres, **Version B** $\frac{2}{0.06^2} \simeq 555.56$ mètres, **Version C** $\frac{4}{0.07^2} \simeq 816.33$ mètres

Question 7. [6 points] Calculer les intégrales définies suivantes
Version A

$$\text{a)} \int_0^\pi x\cos(3x)\mathrm{d}x. \qquad \text{b)} \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{\sin(t)}\mathrm{d}t$$

Version B

$$\text{a)} \int_0^\pi x\sin(2x)\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_0^2 xe^{(x^2)}\mathrm{d}x.$$

Version C

$$\text{a)} \int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_1^e \frac{\ln(x)^2}{x}\mathrm{d}x.$$

Solution :
Version A (a)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(3x) \quad &\overset{f'(x)=\cos(3x),\ g(x)=x}{=} \quad \frac{x\sin(3x)}{3}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(3x)}{3}\mathrm{d}x = \big(\frac{x\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9}\big)\Big|_0^\pi\\ &= \quad \frac{3\pi\sin(3\pi)}{3} + \frac{\cos(3\pi)}{9} - \frac{0\sin(3x)}{3} - \frac{\cos(0)}{9} = -\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t)\sqrt{\sin(t)} \overset{y=\sin(t)}{=} \int_0^1 \sqrt{y}\mathrm{d}y = \frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Version B (a)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(2x) \quad &\overset{f'(x)=\cos(2x),\ g(x)=x}{=} \quad -\frac{x\cos(2x)}{2}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x\\ &= \quad \big(-\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\big)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(b)

$$\int_0^2 xe^{(x^2)}\mathrm{d}x \overset{y=x^2}{=} \frac{1}{2}int_0^4 e^y \mathrm{d}y = \frac{e^y}{2}\Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4-1).$$

Version C (a)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\cos(2x) &\overset{f'(x)=\cos(2x),\ g(x)=x}{=} && \frac{x\sin(2x)}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2x)}{2}\mathrm{d}x \\ &= && \left(\frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b)

$$\int_1^e \frac{\ln(x)^2}{x}\mathrm{d}x \overset{y=\ln(x)}{=} \int_0^1 y^2\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$