Université d'Ottawa

Départment de Mathématiques et de Statistiques

MAT 1732B : Calcul II pour science de la vie

Professeur: Abdelkrim El basraoui

Examen partiel I – Version B - Solution

12 février 2014

Nom ______________________ Prénom ______________________

d'étudiant______________________

Instructions: (Lisez-les attentivement S.V.P.)

- Écrivez votre nom et numéro d'étudiant dans la première page et dans chaque page détachée, s'il y a lieu, dans l'espace précisé.
- La durée de cet examen est de **80 minutes**.
- Cet examen est un examen à livres fermés qui comporte **7 questions**.
- Vous devez justifier votre travail.
- Seules les calculatrices non programmables et non graphiques telles que la TI30X ou similaires sont permises.
- Vous avez deux pages supplémentaires à la fin que vous pouvez utiliser comme feuille de brouillon.

BONNE CHANCE!!!

Question	1	2	3	4	5	6	7	Total
Maximum	4	3	4	6	4	4	5	30
Note								

Question 1. [4 points] Calculez les intégrales suivantes:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2y-5}{y^2-6y+9}\,dy$ b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{e^x[1+(e^{-x})^2]}\,dx$

Solution:

a) On a $y^2-6y+9=(y-3)^2$. On pose $u=y-3$ et donc $\frac{du}{dy}=1$. Aussi on a

y	-1	1
U	-4	-2

Donc en éxprimant $2y-5=2y-6+1=2(y-3)+1$ on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{2y-5}{y^2-6y+9}\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{2(y-5)+1}{y^2-6y+9}\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{2(y-3)}{y^2-6y+9}\,dy + \int_{-1}^{1} \frac{1}{(y-3)^2}\,dy$$
$$= \int_{-4}^{-2} \frac{2u}{u^2}\,du + \int_{-4}^{-2} \frac{1}{u^2}\,du = [2\ln|u|]_{-4}^{-2} - [u^{-1}]_{-4}^{-2} = -2\ln(2)+\frac{1}{4}.$$

b) On pose $u=e^{-x}$ et donc $\frac{du}{dx}=-e^{-x}$. Aussi on a

x	0	1
U	1	e^{-1}

Donc obtient

$$\int_{1}^{e^{-1}} \frac{1}{e^x[1+(e^{-x})^2]}\,dx = -\int_{1}^{e^{-1}} \frac{1}{1+u^2}\,du = [-\arctan(u)]_{1}^{e^{-1}} = \arctan(e^{-1})+\frac{\pi}{4}.$$

Question 2. [3 points] Résolvez l'équation différentielle séparable et à condition initiale suivante:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3te^{-2t}}{y} \qquad y(0) = 4$$

Solution:

- Séparation:

$$ydy = 3te^{-2t}dt$$

- Intégration: une I.P.P. (avec $f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1$ et $g'(t) = e^{-2t} \Rightarrow g(t) = -e^{-2t}/2$) donne

$$\int ydy = \frac{y^2}{2} = \int 3te^{-2t}dt = \frac{-3}{2}(1 + 2\,t)\,e^{-2t} + C.$$

- Constante C: Avec la C.I. $y(0) = 4$ on a

$$\frac{16}{2} = 8 = \frac{-3}{2} + C \Rightarrow C = \frac{19}{2}.$$

- Isolation: On a donc

$$y(t) = \pm\sqrt{\frac{-3}{2}(1 + 2\,t)\,e^{-2t} + 19}.$$

- Conclusion: comme $y(0) = 4$ on a donc

$$y(t) = \sqrt{\frac{-3}{2}(1 + 2\,t)\,e^{-2t} + 19}.$$

Question 3. [4 points] Trouvez l'intégrale suivante

$$\int \frac{5x-25}{x^2-9x+14}\,dx.$$

Solution: Vu que $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)$ on utilisera les fractions partielles. De

$$\frac{5x-25}{x^2+5x-14}=\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-7)}{x^2-9x+14}$$

on a $A(x-2)+B(x-7)=5x-25$. Donc

$$\text{pour } x=7 \Rightarrow A=2$$

$$\text{et pour } x=2 \Rightarrow B=3\,.$$

D'où on a

$$\int \frac{5x-25}{x^2-9x+14}\,dx=\int \frac{2}{x-7}dx+\int \frac{3}{x-2}dx=2\ln|x-7|+3\ln|x-2|+C\,.$$

Question 4. [6 points] Déterminez si les intégrales impropres suivantes convergent ou divergent. S'elles convergent déterminez leurs valeurs.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{7-2x^2}{x^3}dx$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{3}{\sqrt[3]{x-2}}dx$

Solution:

a)
- Primitive: on a
$$\int \frac{7-2x^2}{x^3}dx = \int \frac{7}{x^3}dx - \int \frac{2}{x}dx = \frac{-7}{2x^2} - 2\ln|x| + C\,.$$
- Évaluation: on a par définition
$$\int_1^\infty \frac{7-2x^2}{x^3}dx = \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{7-2x^2}{x^3 2}dx = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{-7}{2x^2} - 2\ln|x|\right]_1^u = -\infty\,.$$
- Conclusion: cette intégrale impropre diverge.

b)
- Domaine: soit $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x-2}}$. On a $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$. Donc il s'agit d'une intégrale impropre en 2.
- Primitive: on posant $u = x-2$ on trouve facilement que
$$\int \frac{3}{\sqrt[3]{x-2}}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2} + C$$
- Évaluation: on a par définition
$$\int_2^3 f(x)dx = \lim_{l\to 2^+}\int_l^2 f(x)dx = \lim_{l\to 2^+}\left[\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\right]_l^3 = \frac{9}{2}\,.$$
- Conclusion: cette intégrale impropre converge vers 9/2.

Question 5. [4 points] Soient les fonctions $f(x) = 5x^2$ et $g(x) = -9x + 2$.
a) Trouvez les points d'intersection des graphes de f et de g.
b) Calculez l'aire bornée par f et g pour les valeurs de x entre les points d'intersection trouvés dans (a).

Solution:

a) On a $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5x^2 + 9x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1/5$ qui sont les points d'intersection.

b) Sur l'intervalle $[-2, 1/5]$ on a $f(x) \leq g(x)$ (comparer $f(0) = 0 < g(0) = 2$). Donc l'aire est

$$A =_{defn} \int_{-2}^{1/5} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^{1/5} (g(x) - f(x)) dx = \frac{1331}{150}.$$

Question 6. [4 points] Les Zombies ont envahi le campus!!! Ils recrutent plus de morts-vivants dans leur rang macabre au taux de

$$\frac{dz}{dt} = f(z) = -7z^3 + 56700z,$$

où t est le temps en heures et z est le nombre des zombies au temps t.
a) Déterminez les points d'équilibre biologiquement signifcatifs de cette équation autonome.

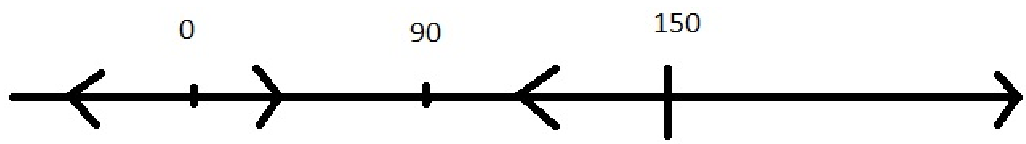
Solution: On a $f(z) = 0 \Leftrightarrow -7z(z^2 - 8100) = 0 \Leftrightarrow z = 0,\ z = \pm 90$. Donc les points d'équilibre biologiquement signifiant sont $z = 0$ et $z = 90$.

b) Déterminez la stabilité de chacun des points d'équilibre trouvés dans (a), en utilisant le test étudié en classe (le test de la dérivée).

Solution: On a $f'(z) = -21z^2 + 56700$.
Pour $z = 0$ on a $f'(0) = 56700 > 0$ et donc $z = 0$ est instable.
Pour $z = 90$ on a $f'(90) = -113400 < 0$ et donc $z = 90$ est stable.

c) Traçez le portrait de phase de cette équation pour $z < 150$.

Solution: On a



.

Question 7. [5 points] Déterminez la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x\sin(3x)$ pour $0 \leq x \leq 2\pi$.

Solution: La valeur moyenne de f est donnée par

$$M_f = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} x\sin(3x)dx\,.$$

Maintenant, une I.P.P. (avec $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ et $g'(x) = \sin(3x) \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{3}\cos(3x)$) donne

$$\int f(x)dx = \frac{-x}{3}\cos(3x) - \int \frac{-1}{3}\cos(3x)dx = \frac{-x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x) + C\,.$$

D'où

$$M_f = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x)\right]_0^{2\pi} = \frac{-1}{3}\,.$$

Page supplémentaire 1

Page supplémentaire 2