MAT 2784-Automne 2013-Examen de mi-session

Nom Solution.

Prénom

Numéro d'étudiant

- Il y a 5 questions et 10 pages dans cet examen.
- Vous devez répondre à toutes les questions.
- Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les pages supplémentaires si nécessaire mais assurez-vous de l'indiquer clairement.
- Vous avez 80 minutes pour compléter l'examen.
- Veuillez rédiger vos réponses de manière lisible et logique.
- C'est un examen à livres fermés.
- Seules les calculatrices non programmables sont permises.
- L'examen sera noté sur un total de 28 points sur l'examen.

Question 1. [6 points] Résoudre le PVI suivant:

$$\underbrace{(ye^x + 2y^2 \sin x)}_{M}dx + \underbrace{(2e^x - 6y\cos x + 2)}_{N}dy = 0, \quad y(0) = -1.$$

Solution $\frac{\partial M}{\partial y} = e^x + 4y\sin x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2e^x + 6y\sin x$: non exacte.

$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \dfrac{-e^x - 2y\sin x}{y(e^x + 2y\sin x)} = -\frac{1}{y} = g(y)$. Un facteur d'intégration est

donné par $\mu(y) = e^{-\int g(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y$. Multiplions par y :

$$\underbrace{(y^2e^x + 2y^3\sin x)}_{M^*}dx + \underbrace{(2ye^x - 6y^2\cos x + 2y)}_{N^*}dy = 0$$

$\frac{\partial M^*}{\partial y} = 2ye^x + 6y^2\sin x$ et $\frac{\partial N^*}{\partial x} = 2ye^x + 6y^2\sin x$: Exacte.

Cherchons une fonction $F(x,y)$ telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = M^*$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = N^*$.

$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2e^x + 2y^3\sin x \Rightarrow F(x,y) = y^2e^x - 2y^3\cos x + h(y) \Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^x - 6y^2\cos x + h'(y)$. En comparant avec $\frac{\partial F}{\partial y} = N^*$, on trouve

$2ye^x - 6y^2\cos x + h'(y) = 2ye^x - 6y^2\cos x + 2y \Rightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow h(y) = y^2 + K$.

La solution générale est alors $F(x,y) = $ Constante $\Rightarrow$

$$y^2e^x - 2y^3\cos x + y^2 = C.$$

$y(0) = -1 \Rightarrow 1 + 2 + 1 = C \Rightarrow C = 4$. La solution du PVI est alors

$$\boxed{y^2e^x - 2y^3\cos x + y^2 = 4}$$

Question 2. **[4 points]** Résoudre le PVI suivant:

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = -x^2y^2, \quad y(1) = \frac{2}{3}$$

<u>Solution</u> Équation de Bernoulli avec $a = 2$.

Posons $u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}\left[-\frac{1}{x}y - x^2y^2\right] \Rightarrow$

$u' = \frac{1}{x}y^{-1} + x^2 \Rightarrow u' - \frac{1}{x}u = x^2$: équation linéaire avec $f(x) = -\frac{1}{x}$

et $r(x) = x^2$. La solution générale est alors

$$u(x) = \frac{\int e^{\int -\frac{1}{x}dx} x^2 dx + C}{e^{\int -\frac{1}{x}dx}} = \frac{\int \left(\frac{1}{x}\right) x^2 dx + C}{\frac{1}{x}} = x\left[\int x\,dx + C\right]$$

$$u(x) = \frac{x^3}{2} + Cx \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{2}{x^3 + 2Cx}.$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow \frac{2}{1+2C} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + 2C = 3 \Rightarrow C = 1$$

La solution du PVI est $\boxed{y = \frac{2}{x^3 + 2x}}$

Question 3. [6 points] Résoudre chacun des PVI suivants:

1. $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 4$
2. $x^2y' - 5xy' + 9y = 0, \; x > 0, \; y(1) = 1, \; y'(1) = 6.$

Solution 1) L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow$

$\lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$. La solution générale est

alors $y = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\sin(2x) = e^{-x}\left[c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)\right]$

$y' = -e^{-x}\left(c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)\right) + e^{-x}\left(-2c_1\sin(2x) + 2c_2\cos(2x)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2 \\ y'(0) = 4 \Rightarrow -c_1 + 2c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = 3 \end{array}\right\}$$

La solution du PVI est

$$\boxed{y = e^{-x}\left[2\cos(2x) + 3\sin(2x)\right]}$$

2) Euler-Cauchy avec $a = -5$, $b = 9$. L'équation caractéristique est

$m^2 + (a-1)m + b = 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = 3$:

racine réelle double. La solution générale est

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln x$$

$$y' = 3c_1 x^2 + 3c_2 x^3 \ln x + c_2 x^2.$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ y'(1) = 6 \Rightarrow 3c_1 + c_2 = 6 \Rightarrow c_2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La solution du PVI est alors

$$\boxed{y = x^3 + 3x^3 \ln x}$$

Question 4. [**4 points**] Donner la solution générale de l'équation différentielle suivante:

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

Solution L'équation caractéristique est $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$. Remarquer que $\lambda = 1$ est une racine. Alors $\lambda - 1$ est un facteur.

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} -\lambda^3 \pm \lambda^2 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ \cline{1-1} -4\lambda^2 + 8\lambda - 4 & \\ \pm 4\lambda^2 \mp 4\lambda & \\ \cline{1-1} 4\lambda - 4 & \\ 4\lambda - 4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Alors $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$
$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$

Les racines sont

$\lambda_1 = 1$; racine simple

$\lambda_2 = 2$ racine double.

Alors la solution générale est $\boxed{y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}}$

Question 5. [6 points] Utiliser la méthode **d'itération du point fixe** pour estimer la racine de l'équation

$$1 + \cos x - 3x = 0$$

dans l'intervalle [0, 1] à 5 décimales près. Utiliser $x_0 = 0.6$ et avant de commencer l'itération, **montrer que les conditions de convergence de la suite d'itération sont satisfaites.**

Solution $1 + \cos x - 3x = 0 \iff x = \frac{1+\cos x}{3}$. Posons $g(x) = \frac{1+\cos x}{3}$.

Clairement, $g(x)$ est continue sur $[0,1]$. De plus

- $g'(x) = -\frac{1}{3}\sin x$ continue sur $[0,1]$.
- $|g'(x)| = \frac{1}{3}|\sin x| \leq \frac{1}{3} < 1$ sur $[0,1]$.

Alors la suite d'itération $x_{n+1} = g(x_n)$ converge pour tout $x \in [0,1]$

$x_0 = 0.6 \Rightarrow x_1 = g(x_0) = \frac{1+\cos(0.6)}{3} = 0.60845$

$x_2 = g(x_1) = \frac{1+\cos(0.60845)}{3} = 0.60684$

$x_3 = g(x_2) = \frac{1+\cos(0.60684)}{3} = 0.60715$

$x_4 = g(x_3) = \frac{1+\cos(0.60715)}{3} = 0.60709$

$x_5 = g(x_4) = \frac{1+\cos(0.60709)}{3} = 0.60710$

$x_6 = g(x_5) = \frac{1+\cos(0.60710)}{3} = 0.60710$

$\Rightarrow x = 0.60710$ est la racine exacte à 5 décimales près.