Daniele Rosso
Department of Mathematics and Statistics
University of Ottawa
email:drosso@uottawa.ca

MAT1700 (Automne 2013)
Examen de mi-session #1

Écrivez CLAIREMENT votre
Nom de famille, prénom:
et
Numéro d'étudiant:

Instructions:

- La durée de l'examen est de 80 minutes.
- L'utilisation de manuel, notes de cours, calculatrice ou tout autre appareil électronique de calcul est interdite.
- Pour les questions à choix multiple:
  écrivez la reponse (lettre de 'A' à 'E') dans le tableau ci-dessous
- Pour les problèmes à solution longue:
  écrivez clairement la solution dans l'espace qui suit la question. Vous pouvez utiliser le verso des pages si nécessaire (veuillez clairement l'indiquer dans ce cas).
- Vous trouverez une feuille de brouillon à la fin du questionnaire.
- Ne détachez pas le questionnaire.

Réponses

	1	2	3	4	5	6	7	Total
Problème	à choix multiple				à solution longue			
Votre résultat								

Problèmes à choix multiple

Problème 1 (5 points) *Soit* $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$. *Trouvez le domaine de* f.

A) $]2, \infty[$ **B)** $]-2, 3[$ **C)** $]-\infty, 2] \cup [3, \infty[$ **D)** $[2, 3]$ **E)** $]-\infty, -2[\cup]3, \infty[$
Pour que la racine soit définie, il nous faut que $x^2 - 5x + 6 \geq 0$. Factorisant on obtient $(x-2)(x-3) \geq 0$.

	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$x - 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-2)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc on a que $(x-2)(x-3) \geq 0$, quand $x \leq 2$ et $x \geq 3$.
La réponse est **C**.

Problème 2 (5 points) *Trouvez la limite*

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{\sqrt{x} - 2}.$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B)** n'existe pas **C)** -2 **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** 8

C'est une forme indeterminée $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{\sqrt{x} - 2} &= \lim_{x \to 4} \frac{(2x - 8)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{2(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} \\
&= \lim_{x \to 4} 2(\sqrt{x} + 2) \\
&= 2(\sqrt{4} + 2) \\
&= 8
\end{aligned}$$

La réponse est **E**.

Problème 3 (5 points) *Considerez la fonction*

$$f(x) = \ln x + \frac{2x+3}{x-2}$$

Quelle est l'equation de la droite tangente au graphique $y = f(x)$ au point $(1, -5)$?

A) $y = -6x + 1$ **B)** $y = -7x$ **C)** $y = 13x - 5$
D) $y = -5x + 6$ **E)** aucune de ces réponses

L'equation de la droite tangente sera donnée par $y - (-5) = f'(1)(x - 1)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\ln x + \frac{d}{dx}\frac{2x+3}{x-2} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2(x-2)-(2x+3)1}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{1}{1} + \frac{2(1-2)-(2\cdot 1+3)1}{(1-2)^2} \\ &= 1 + \frac{-2-5}{1^2} = 1 - 7 = -6 \end{aligned}$$

Donc la droite est

$$y - (-5) = -6(x - 1)$$

d'où

$$\begin{aligned} y + 5 &= -6x + 6 \\ y &= -6x + 1 \end{aligned}$$

La réponse est **A**.

Problème 4 (5 points) *Considerez la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \geq 3, \\ kx + 2, & x < 3. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de la constante k est-ce que $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe?

A) 5 **B)** aucun k **C)** -2 **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** 1

$\lim_{x\to 3} f(x)$ existe si $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(x^2 - 4) = 3^2 - 4 = 5$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} kx + 2) = 3k + 2$$

On veut

$$\begin{aligned} 3k + 2 &= 5 \\ 3k &= 3 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

La réponse est **E**.

Problèmes à solution longue

Problème 5 (7 points)[1] *Une personne dispose de \$3000 au début de l'année. Le salaire mensuel de cette personne est \$3000, payé à la fin de chaque mois. Pour combler ses besoins, pendant chaque mois, la personne dépense 90% de la somme qu'elle possédait au début du mois.*
a) Quelle est le budget de la personne juste après la fin du deuxième mois?
b) Après deux années?
c) Après une infinité d'années?
(Ce n'est pas nécessaire de simplifier les réponses)

On appelle S_n le budget en dollars à la fin du n-ième mois. On remarque que $90\% = 0,9$. À la fin de chaque mois, la personne aura $10\% = 0,1$ de qu'elle avait au début du mois plus le salaire mensuel. Donc en général on a

$$S_n = (0,1)S_{n-1} + 3000$$

En particulier, on a

$$S_1 = (0,1)3000 + 3000$$

$$\begin{aligned} S_2 &= (0,1)S_1 + 3000 \\ &= (0,1)\left((0,1)3000 + 3000\right) + 3000 \\ &= (0,1)^2 3000 + (0,1)3000 + 3000 \end{aligned}$$

Ce qui répond à la partie a). On obtient alors

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} 3000(0,1)^i = 3000\frac{(1-(0,1)^{n+1})}{1-(0,1)}$$

À la fin de deux années, c'est la fin du 24-ième mois, donc la réponse pour la partie b) est

$$S_{24} = \sum_{i=0}^{24} 3000(0,1)^i = 3000\frac{(1-(0,1)^{25})}{1-(0,1)}.$$

Pour c), on veut la série infinie

$$\begin{aligned} S_\infty &= \sum_{i=0}^{\infty} 3000(0,1)^i \\ &= 3000\frac{1}{1-(0,1)} \\ &= 3000\frac{1}{\frac{9}{10}} \\ &= 3000\frac{10}{9} \end{aligned}$$

[1] expliquez avec les détails vos réponses

Problème 6 (6 points)[2] *Soit A une valeur actualisée, déposée dans un compte banquaire avec un intérêt r et composé continûment. Soit $C = C(t)$ la valeur capitaliśee après t années.*
a) Sachant que la valeur actualisée se double en 4 ans, trouvez r.
b) Sachant que $C(8) = 40000$ trouvez la valeur actualisée A.
c) Trouvez $C(16)$.

(Ce n'est pas nécessaire de simplifier les réponses)

Si on appelle l'intérêt r, la formule nous donne que

$$C(t) = Ae^{rt}$$

Si après quatre années, la valeur actualisée a doublé, on a

$$\begin{aligned} C(4) &= Ae^{r4} \\ C(4) &= 2A \\ 2A &= Ae^{r4} \\ 2 &= e^{r4} \\ \ln 2 &= r4 \\ r &= \frac{\ln 2}{4} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne a). Pour b), on écrit

$$\begin{aligned} C(8) &= Ae^{r8} = Ae^{\frac{\ln 2}{4}8} = Ae^{2\ln 2} = A2^2 = A4 \\ C(8) &= 40000 \\ 40000 &= A4 \\ A &= 10000 = \frac{40000}{e^{2\ln 2}} \end{aligned}$$

Pour c) on a

$$\begin{aligned} C(16) &= 10000e^{\frac{\ln 2}{4}16} \\ &= 10000e^{4\ln 2} \\ &= 10000(2)^4 \\ &= 10000(16) = 160000 \end{aligned}$$

[2] expliquez avec les détails vos réponses

Problème 7 (7 points)[3] *Soit* $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x \neq -2$. *Trouvez* $f'(x)$ *pour* $x \neq -2$, *en utilisant la définition de la dérivée comme limite.*

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h+2} - \frac{1}{x+2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+2} - \frac{1}{x+2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{(x+2)-(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{-h}{(x+h+2)(x+2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h+2)(x+2)} \\
&= \frac{-1}{(x+0+2)(x+2)} \\
&= -\frac{1}{(x+2)^2}
\end{aligned}
$$

[3] expliquez avec les détails votre réponse

Espace brouillon