

Daniele Rosso
Department of Mathematics and Statistics
University of Ottawa
email:drosso@uottawa.ca

MAT1700C (Automne 2013)
Examen de mi-session #2

Écrivez CLAIEMENT votre

Nom de famille:

Prénom:

et

Numéro d'étudiant:

Instructions:

- La durée de l'examen est de 80 minutes.
- L'utilisation de manuel, notes de cours, calculatrice ou tout autre appareil électronique de calcul est interdite.
- Pour les questions à choix multiple:
écrivez la réponse (lettre de 'A' à 'E') dans le tableau ci-dessous
- Pour les problèmes à solution longue:
écrivez clairement la solution dans l'espace qui suit la question. Vous pouvez utiliser le verso des pages si nécessaire (veuillez clairement l'indiquer dans ce cas).
- Vous trouverez une feuille de brouillon à la fin du questionnaire.
- Ne détachez pas le questionnaire.

Réponses

Problème	1	2	3	4	5	6	7	Total
Votre réponse			à solution longue					
Votre résultat								

Problèmes à choix multiple

Problème 1 (4 points) Soit $D(P) = \sqrt{P-3}$ la fonction demande, où P est le prix d'un produit. Quelle est l'élasticité de la demande à $P = 4$? Est-ce que la demande est élastique ou inélastique?

A) 2, élastique B) 2, inélastique C) $-\frac{1}{4}$, élastique D) $-\frac{1}{4}$, inélastique E) $\frac{3}{4}$, inélastique

L'élasticité est donnée par la formule

$$\eta = D'(P) \frac{P}{D(P)}.$$

On a

$$D'(P) = \frac{1}{2}(P-3)^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\eta = \frac{1}{2}(P-3)^{-\frac{1}{2}} \frac{P}{\sqrt{P-3}} = \frac{1}{2} \frac{P}{(P-3)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}.$$

Quand $P = 4$, on obtient alors

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{4}{4-3} = \frac{4}{2} = 2.$$

Comme $|2| > 1$, la demande est élastique.

La réponse correcte est **A**.

Problème 2 (4 points) Trouvez la valeur maximale de la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur l'intervalle $[-2, 0]$.

A) 0 B) 1 C) -2 D) 5 E) 10

La dérivée est

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3).$$

Donc les points critiques sont -1 et 3. Entre eux, seulement -1 est dans l'intervalle considéré. Il suffit de calculer la valeur de f en tout point critique et les comparer entre eux.

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10,$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 5 = -8 - 12 + 18 + 5 = 3.$$

$$f(0) = 5.$$

Donc le maximum sur $[-2, 0]$ est $f(-1) = 10$.

La réponse correcte est **E**.

Problèmes à solution longue

Problème 3 (6 points) *Trouvez l'équation de la droite tangente à la courbe*

$$x^3y + 4x^2y^2 - 5y^3 = 0$$

au point (1, 1).

La dérivée implicite nous donne

$$3x^2y + x^3y' + 8xy^2 + 8x^2yy' - 15y^2y' = 0$$

donc

$$\begin{aligned}x^3y' + 8x^2yy' - 15y^2y' &= -3x^2y - 8xy^2 \\y'(x^3 + 8x^2y - 15y^2) &= -3x^2y - 8xy^2 \\y' &= \frac{-3x^2y - 8xy^2}{x^3 + 8x^2y - 15y^2}\end{aligned}$$

Au point (1, 1) on obtient

$$y' = \frac{-3 - 8}{1 + 8 - 15} = \frac{-11}{-6} = \frac{11}{6}$$

La droite tangente est alors donnée par

$$\begin{aligned}y - 1 &= \frac{11}{6}(x - 1) \\y &= \frac{11}{6}x - \frac{11}{6} + 1 \\y &= \frac{11}{6}x - \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Problème 4 (8 points)¹ Une boîte a la base carrée avec côté de longueur x . La hauteur de la boîte est h . Si le volume de la boîte est de 64 cm^3 , quelles sont les dimensions x et h qui minimisent la surface?

Le volume de la boîte est donné par l'aire de la base fois la hauteur. Comme la base est un carré de côté x , l'aire est x^2 . Donc on a $V = x^2h = 64$. La surface de la boîte sera donnée par l'aire des deux bases, plus la surface latérale. L'aire des deux bases est $x^2 + x^2 = 2x^2$. La surface latérale, quand on la déplie, est un rectangle qui a comme base le périmètre du carré et comme hauteur la hauteur de la boîte, donc la surface latérale est $4xh$. En conclusion, la fonction qu'on veut minimiser est

$$S = 2x^2 + 4xh.$$

On sait que $x^2h = 64$, donc $h = \frac{64}{x^2}$, donc on exprime S comme fonction seulement de x comme

$$S = 2x^2 + 4x \frac{64}{x^2} = 2x^2 + \frac{4 \cdot 64}{x}.$$

Remarque que le domaine est $x > 0$, ou $]0, +\infty[$.

On calcule la dérivée pour trouver les points critiques

$$S' = 4x - \frac{4 \cdot 64}{x^2}$$

Donc $S' = 0$ quand

$$4x - \frac{4 \cdot 64}{x^2} = 0$$

$$\frac{4x^3 - 4 \cdot 64}{x^2} = 0$$

$$4x^3 - 4 \cdot 64 = 0$$

$$x^3 = 64$$

$$x = 4$$

Remarque que si $x < 4$, alors $x^3 < 64$, donc $\frac{4x^3 - 4 \cdot 64}{x^2} < 0$ et si $x > 4$, alors $x^3 > 64$ donc $\frac{4x^3 - 4 \cdot 64}{x^2} > 0$. Alors on a bien un minimum en $x = 4$.

Quand $x = 4$, on obtient alors $h = \frac{64}{4^2} = 4$.

¹expliquez avec les détails vos réponses

Problème 5 (8 points)² *Considérez la fonction*

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

a) *Trouvez le domaine de définition de f , les asymptotes verticales et horizontales (s'ils existent).*

b) *Trouvez $f'(x)$, les intervalles de croissance/décroissance, les maximums et minimums locaux.*

c) *Trouvez $f''(x)$, les intervalles de concavité et les points d'inflexion.*

(Ce n'est pas nécessaire de dessiner le graphique de la fonction)

a) Le dénominateur devient 0 quand $x = 0$, donc le domaine de la fonction est $] -\infty, 0[\cup] 0, \infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{2x} = +\infty$$

donc il y a un asymptote vertical en $x = 0$. Il n'y a pas d'asymptote horizontales car le numérateur est un polynôme de degré plus haut que le dénominateur.

b)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - (x^2 + 1) \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 2}{4x^2} = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$$

La dérivée n'existe pas quand $x = 0$, mais ce n'est pas un point critique car $x = 0$ n'est pas dans le domaine de la fonction f . Le dénominateur est toujours positif quand $x \neq 0$, donc pour trouver le signe de la dérivée il suffit de trouver le signe du numérateur.

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

donc on a

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x - 1$	-	-	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+	+	+
$(x - 1)(x + 1)$	+	0	-	-	0	+

Donc f est croissante sur $] -\infty, -1]$ et sur $[1, \infty[$. Elle est décroissante sur $[-1, 0[\cup] 0, 1]$. Avec le test de la dérivée première on a que on a un maximum local en $x = -1$ et un minimum local en $x = 1$.

c)

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^2 - 1}{2x^2} = \frac{2x \cdot 2x^2 - (x^2 - 1) \cdot 4x}{4x^4} = \frac{4x^2 - 4x^2 + 4}{4x^3}$$

donc

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}$$

Ce n'existe pas quand $x = 0$, mais ce point n'est pas dans le domaine de f , sinon on a que $x^3 > 0$ quand $x > 0$ et $x^3 < 0$ quand $x < 0$. Donc $f''(x) > 0$ quand $x > 0$, $f''(x) < 0$ quand $x < 0$, ce qui nous donne que f a la concavité vers le haut sur $] 0, \infty[$ et la concavité vers le bas sur $] -\infty, 0[$. Il n'y a pas de points d'inflexion.

²expliquez avec les détails vos réponses

(Espace additionnel pour Problème 5)

Problème 6 (5 points)³ Supposez que $f'(x) = x^{\frac{1}{3}} + x$ et que $f(0) = -1$. Trouvez la fonction $f(x)$.

On sait que $f(x)$ doit être une primitive de $f'(x)$, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \int x^{\frac{1}{3}} + x \, dx \\ &= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^2}{2} + k \\ f(x) &= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^2}{2} + k \end{aligned}$$

Pour trouver k , on sait que $f(0) = -1$, d'où

$$\begin{aligned} -1 &= f(0) = \frac{3}{4}0^{\frac{4}{3}} + \frac{0^2}{2} + k \\ -1 &= 0 + 0 + k \\ k &= -1 \end{aligned}$$

En conclusion,

$$f(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^2}{2} - 1.$$

³expliquez avec les détails vos réponses

Problème 7 (5 points)⁴ *Trouvez la suivante primitive (intégrale indéfinie)*

$$\int x \ln x \, dx$$

On utilise l'intégration par parties. On choisit

$$f(x) = \ln x; \quad g'(x) = x; \quad \text{qui donne } f'(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Donc la formule nous donne

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

⁴expliquez avec les détails votre réponse

Espace brouillon